Chapitre 6

Primitives, intégrales

Plan du chapitre

Dans tout ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point (càd I n'est pas un singleton).

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: dans chaque résultat, on peut remplacer tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ ou tous les $\mathbb{K}$ par $\mathbb{C}$.

1 Primitives

1.1 Primitive d'une fonction continue

Définition 6.1

Soient $D \subset \mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{K}$. On appelle primitive de f sur D toute fonction $F : D \to \mathbb{K}$ dérivable sur I telle que $F' = f$.

Attention, la primitive de f n'est pas unique, il y en a une infinité :

Proposition 6.2

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et F une primitive de f sur I. Alors $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f sur I si et seulement si la fonction $F - G$ est constante sur I.

En d'autres termes, les primitives de f sont exactement les fonctions de la forme

$$x \mapsto F(x) + C$$

avec $C \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Sens direct : si G est une primitive de f sur I, alors

$$(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$$

et comme I est un *intervalle*, on en déduit que $F - G$ est constante.
Sens réciproque : on suppose que $F - G$ est constante. Donc il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $x \in I$, $(F - G)(x) = C$. Alors $G(x) = F(x) - C$. Ainsi, la fonction G est dérivable sur I comme somme de fonctions dérivables, et

$$G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$$

Ainsi, G est bien une primitive de f sur I. □

Exemple 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Toutes les primitives de $x \mapsto x^n$ sur $I = \mathbb{R}$ sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.
Toutes les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $x \mapsto \ln x + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.
Toutes les primitives de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $I = \mathbb{R}_-^*$ sont les fonctions $x \mapsto \ln(-x) + C$ avec $C \in \mathbb{K}$.

Remarque (Mieux vaut toujours se placer sur un intervalle pour chercher des primitives)**.** Par l'exemple ci-dessus, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}^*$ est $x \mapsto \ln|x|$. Mais pour avoir toutes les primitives, il ne suffit pas de rajouter une constante (à savoir $x \mapsto \ln|x| + C$). Ce serait le cas si on pouvait appliquer la proposition 6.2, mais elle n'est valide que sur un **intervalle**. Or $D = \mathbb{R}^*$ n'en est pas un.
Toutes les primitives de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $D = \mathbb{R}^*$ sont en fait les fonctions F de la forme

$$F(x) = \begin{cases} \ln x + C_1 & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + C_2 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

avec $C_1, C_2 \in \mathbb{K}$. Ainsi, la constante C peut "varier d'un intervalle à l'autre".

1.2 Primitives usuelles

Un formulaire sur les primitives usuelles est disponible sur le site.

2 Lien entre primitives et intégrale

2.1 Le théorème fondamental

Le théorème qui suit est le résultat le plus important du chapitre (ultérieur) Intégration. C'est dans ce chapitre qu'on en fera la démonstration, ainsi que la construction précise de l'intégrale.

Théorème 6.3 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et $a \in I$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} F : I &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

est *l'unique* primitive de f qui s'annule en a : c'est l'unique fonction (dérivable) qui vérifie $F' = f$ et $F(a) = 0$.

Corollaire 6.4

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et F une primitive *quelconque* de f sur I. Alors

$$\forall a, b \in I \qquad \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Preuve du corollaire. Soit G l'unique primitive de f qui s'annule en a. Alors par le théorème fondamental, pour tout $x \in I$

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

et donc comme $G(a) = 0$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = G(b) - G(a)$$

Maintenant, si F est une primitive *quelconque* de f sur I, alors $G - F$ est constante, donc en particulier $(G-F)(b) = (G-F)(a)$. Ainsi,

$$F(b) - F(a) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)dt$$

d'où le résultat. □

Remarque (Conséquences du corollaire)**.**

- On note en général $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.
- La preuve montre que le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F qu'on choisit : si G est une autre primitive de f, alors $[G(x)]_a^b = [F(x)]_a^b$.
- La variable selon laquelle on intègre, ici t, est muette :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(@)d@$$

  Donc $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ **ne dépend pas de** t.

2.2 Remarques sur le théorème fondamental

Le théorème fondamental et son corollaire mettent en évidence le lien très fort entre primitives et intégrales :

- **(Intégrale $\to$ Primitive)** Si on sait calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors par le théorème fondamental, on connait une primitive F de f. Ainsi, *toutes* les primitives de f sur I sont les fonctions

$$x \mapsto \int_a^x f(t)dt + C \quad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

- **(Primitive $\to$ Intégrale)** Si on connait une primitive F de f sur I, alors le corollaire 6.4 permet de calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

Outre ces deux aspects, le théorème fondamental a aussi une utilité plus théorique :

Corollaire 6.5

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.
En outre, pour tout $a \in I$, il y a une primitive et une seule qui s'annule en a.

Par exemple, la fonction ln a été définie comme étant l'unique primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. En d'autre termes, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$$

Enfin, voici une réécriture du corollaire 6.4 qui sert également en pratique :

Corollaire 6.6

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors

$$\forall a, b \in I \qquad f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, la fonction f' est continue sur I. De plus f est clairement une primitive de f' sur I. On vérifie donc les hypothèses du corollaire 6.4 pour la fonction f', ce qui donne le résultat. □

3 Calcul pratique d'intégrales

3.1 Reconnaitre une primitive

Si on connait une primitive de la fonction à intégrer, alors le théorème fondamental permet de conclure. *Dans les exercices, on peut appliquer directement la formule* $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$ *sans rappeler les hypothèses sur* f.

Exemple 2. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2+1}dx$.

Proposition 6.7 (Primitives en fonction de u, u')

Soit $u : I \to \mathbb{K}$ une fonction dérivable sur I.

- Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $c \in \mathbb{K}$, la fonction $x \mapsto u'(\lambda x + c)$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{\lambda}u(\lambda x + c)$.
- La fonction $u'e^u$ admet pour primitive e^u.
- Si u ne s'annule pas sur I, la fonction $\dfrac{u'}{u}$ admet pour primitive $\ln|u|$.
- Si $u > 0$ sur I, la fonction $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ admet pour primitive $2\sqrt{u}$.
- Si $u > 0$ sur I et $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la fonction $u'u^\alpha$ admet pour primitive $\dfrac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$.

Exemple 3. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x+1}dx$.

Exemple 4. Soit $k \in \mathbb{Z}^*$. Donner une primitive de $x \mapsto \cos(kx)$. En déduire $\displaystyle\int_0^\pi \cos(kt)dt$.

Exemple 5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_a^b xe^{x^2}dx$.

Exemple 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_a^b \frac{2x}{1+x^2}dx$.

3.2 Propriétés de l'intégrale

On rappelle quelques propriétés générales de l'intégrale. Elles seront démontrées au chapitre d'intégration.

Proposition 6.8

Soient $f : I \to \mathbb{K}$ et $a, b \in I$. Alors

1. **Linéarité de l'intégrale** : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,dt = \lambda \int_a^b f(t)dt + \mu \int_a^b g(t)dt$$

2. **Relation de Chasles** : soit $c \in I$. Alors

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt$$

En particulier $\int_a^a f(t)dt = 0$.

3. **Inversion des bornes** :

$$\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$$

4. **Positivité** : si $a \leq b$ et $f \geq 0$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \geq 0$$

5. **Croissance** : soit $g : I \to \mathbb{K}$. Si $a \leq b$ et $f \leq g$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt$$

Démonstration. Admis pour le moment (cela demande la construction de l'intégrale). □

Remarque (Linéarité)**.** La notion de linéarité est très large : le “crochet” d'intégration est linéaire :

$$[\lambda f(x) + \mu g(x)]_a^b = \lambda\,[f(x)]_a^b + \mu\,[g(x)]_a^b$$

Il en va de même pour la dérivation :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

ou encore pour les sommes (mais pas les produits) :

$$\sum_{k=0}^{n} (\lambda u_k + \mu v_k) = \lambda \sum_{k=0}^{n} u_k + \mu \sum_{k=0}^{n} v_k$$

Enfin, c'est également le cas des équations différentielles... linéaires ! On le verra bientôt...

3.3 Intégration par parties

Soient u, v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, et $a, b \in I$. Alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$

Démonstration. On remarque que uv est une primitive de $u'v + v'u$ sur $[a, b]$, et comme $u'v + v'u$ est une fonction continue (par produit et somme de fonctions continues), on peut appliquer le théorème fondamental à $u'v + v'u$. On obtient

$$\begin{aligned}[u(t)v(t)]_a^b &= \int_a^b \left(u'v + v'u\right)(t)dt \\ &= \int_a^b u'(t)v(t)dt + \int_a^b u(t)v'(t)dt\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Cette formule permet de remplacer une fonction par sa dérivée. Elle est particulièrement adaptée pour les fonctions “compliquées” dont la dérivée est simple.

Exemple 7. Pour $a,b>0$, calculer $\int_a^b \ln x$. En déduire une primitive de $\ln x$.

3.4 Changement de variables

Proposition 6.9

Soit f une fonction continue sur I, et φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$ à valeurs dans I.

$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. La fonction $(f\circ\varphi)\times\varphi'$ est la dérivée de $F\circ\varphi$ et est continue sur $[a,b]$ car $f\circ\varphi$ et φ' le sont. Par le théorème fondamental,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx &= [(F\circ\varphi)(x)]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= [F(t)]_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt\end{aligned}$$

□

Attention à la méthode pour réaliser un changement de variable : il faut s'entrainer à faire des exercices.

Exemple 8. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{ch} x}dx$.

Exemple 9. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$.

Proposition 6.10

Soient $a\geq 0$ et f une fonction continue.

- Si $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ est impaire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$.
- Si $f:[-a,a]\to\mathbb{R}$ est paire, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.
- Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est T-périodique, alors pour tout $b\in\mathbb{R}$, on a $\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Démonstration. On ne fait la preuve que du résultat pour f impaire. Tout d'abord,

$$\int_{-a}^a f(t)dt = \int_{-a}^0 f(t)dt + \int_0^a f(t)dt$$

Or,

$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{0} f(t)dt &= \int_{a}^{0} -f(-u)du && \text{en posant } t=-u \\
&= \int_{0}^{a} f(-u)du \\
&= -\int_{0}^{a} f(u)du && \text{par imparité}
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

3.5 Primitives et intégrales de fonctions complexes

Définition 6.11

Soient $a,b \in \mathbb{R}$ et $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. Si f est continue, alors $\mathrm{Re} f$ et $\mathrm{Im} f$ le sont aussi et on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f(t)dt := \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt + i\int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

En d'autres termes,

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))dt$$

Exemple 10. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} (x+ix^2)dx$.

3.6 Méthodes de calcul à connaitre

Méthode (Intégrales des fonctions $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$)

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ avec $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$. Pour calculer $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, on écrit

$$\begin{aligned}
\int_a^b e^{\alpha x}\cos(\beta x)dx &= \int_a^b e^{\alpha x}\mathrm{Re}\left(e^{i\beta x}\right)dx = \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{\alpha x + i\beta x}dx\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\left[\frac{1}{\alpha+i\beta}e^{(\alpha+i\beta)x}\right]_a^b\right)
\end{aligned}$$

et de même pour $\displaystyle\int_a^b e^{\alpha x}\sin(\beta x)dx$.

Exemple 11. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sin(4x)dx$.

Méthode (Intégrales des fonctions $\cos^n x$ et $\sin^n x$)

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b \cos^n t\,dt$ ou $\displaystyle\int_a^b \sin^n t\,dt$, on utilise la méthode de *linéarisation* (chapitre 3) qui permet d'exprimer $\cos^n t$ ou $\sin^n t$ en somme de $\cos(kt)$ et de $\sin(kt)$.
On notera que pour $n=2$, il suffit d'appliquer les formules $\cos^2 t = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2t))$ et $\sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1-\cos(2t))$.

Exemple 12. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^\pi \cos^4 t\, dt$.

Exemple 13. Calculer l'intégrale $\mathcal{I} = \int_0^\pi \cos t \, \sin^4 t\, dt$.

Méthode (Intégrale de $\frac{1}{ax^2+bx+c}$)

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $P : x \in \mathbb{R} \mapsto ax^2+bx+c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$).
Si P ne s'annule pas sur un intervalle $[A, B]$, alors la fonction $\frac{1}{P}$ sera continue sur $[A, B]$, donc $\int_A^B \frac{1}{P(x)} dx$ a un sens.

1. Si P admet une racine double $r \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x-r)^2$. Alors, si $r \notin [A, B]$, on obtient

$$\int_A^B \frac{1}{a(x-r)^2} dx = \left[\frac{-1}{a(x-r)}\right]_A^B$$

2. Si P admet deux racines distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, on a donc $P(x) = a(x-r_1)(x-r_2)$. Alors, si $r_1, r_2 \notin [A, B]$, on trouve des coefficients $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall x \in [A, B] \qquad \frac{1}{(x-r_1)(x-r_2)} = \frac{c_1}{x-r_1} + \frac{c_2}{x-r_2}$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{1}{a(x-r_1)(x-r_2)} dx &= \frac{1}{a} \int_A^B \left(\frac{c_1}{x-r_1} + \frac{c_2}{x-r_2}\right) dx \\ &= \frac{1}{a} \left[\alpha \ln(x-r_1) + \beta \ln(x-r_2)\right]_A^B\end{aligned}$$

3. Si P n'admet aucune racine réelle, on peut le mettre sous la forme canonique $P(x) = a\left((x+\beta)^2 + \gamma^2\right)$ avec $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ et $\gamma \neq 0$. Alors on obtient

$$\begin{aligned}\int_A^B \frac{1}{a\left((x+\beta)^2+\gamma^2\right)} dx &= \frac{1}{a\gamma^2} \int_A^B \frac{1}{\frac{1}{\gamma^2}(x+\beta)^2+1} dx \\ &= \frac{1}{a\gamma} \left[\arctan\left(\frac{1}{\gamma}(x+\beta)\right)\right]_A^B\end{aligned}$$

Exemple 14. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+2x+1} dx$.

Exemple 15. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_2 = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+x-2} dx$.

Exemple 16. Calculer l'intégrale $\mathcal{I}_3 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+x+1} dx$.