Chapitre 3

Nombres complexes

Plan du chapitre

La construction rigourseuse des nombres complexes nécessite un formalisme et un vocabulaire particuliers que nous verrons à un chapitre ultérieur. Pour le moment, il faut admettre quelques propriétés.

1 L'ensemble $\mathbb{C}$, le nombre i

1.1 Ensemble $\mathbb{C}$

On admet l'existence d'un nombre, noté i, qui vérifie $\boxed{i^2 = -1}$. Ce nombre i n'est pas dans $\mathbb{R}$, car tout carré d'un réel est positif.
On va construire un ensemble $\mathbb{C}$, qui contient $\mathbb{R}$ et i, et sur lequel on peut définir des opérations (addition, soustraction, multiplication, division...) qui "ressemblent" à celles des réels.

Les éléments de $\mathbb{C}$ sont appelés *nombres complexes* ou parfois juste *complexes*. On les note en général z. L'ensemble $\mathbb{C}$ est donc appelé l'ensemble des nombres complexes.

Définition 3.1

On définit l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$, par l'ensemble

$$\mathbb{C} = \left\{a + ib \mid (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Ainsi, tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ est déterminé de manière unique par un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Remarque. L'ensemble $\mathbb{R}$ des réels est un sous-ensemble de $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{R} = \{a + 0i \mid a \in \mathbb{R}\}$$

On note aussi

$$i\mathbb{R} = \{0 + ib \mid b \in \mathbb{R}\}$$

et si $z \in i\mathbb{R}$, on dit que z est un imaginaire pur.

1.2 Forme algébrique d'un complexe

Définition 3.2

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.

- Le réel a, noté $\mathrm{Re}z$, est appelé la partie réelle de z.
- Le réel b, noté $\mathrm{Im}z$, est appelé la partie imaginaire de z.

L'écriture de z sous la forme $z = a + ib$ est dite la forme algébrique de z.

À noter : $\mathrm{Re}z$ et $\mathrm{Im}z$ sont des *réels*. La dernière phrase de la définition 3.1 implique

Proposition 3.3

Deux nombres complexes z et z' sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes parties réelles et imaginaires :

$$z = z' \iff \left(\mathrm{Re}z = \mathrm{Re}z' \text{ et } \mathrm{Im}z = \mathrm{Im}z'\right)$$

Proposition 3.4 (Caractérisation des réels et imaginaires purs par Re et Im)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}z = 0$
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}z = 0$

Ainsi tout réel peut être vu comme un complexe dont la partie imaginaire est nulle :

$$1 = 1 + 0i \in \mathbb{C} \qquad 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C} \qquad -\pi = -\pi + 0i \in \mathbb{C}$$

2 Opérations avec les complexes

2.1 Opérations $+, -, \times, /$

Soient $z = a + i b$ et $z' = a' + i b'$ deux complexes. On définit les opérations suivantes :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + i b) + (a' + i b') \\ &= (a + a') + i(b + b') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z - z' &= (a + i b) - (a' + i b') \\ &= (a - a') + i(b - b') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} zz' &= (a + i b)(a' + i b') \\ &= \big(aa' - bb'\big) + i(ab' + ba') \end{aligned}$$

et si $z' \neq 0$, c'est-à-dire $(a', b') \neq (0, 0)$,

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + ib}{a' + ib'} = \dots \quad \text{(on verra plus tard)}$$

Les opérations entre complexes sont assez naturelles : tout se passe comme si on calculait dans $\mathbb{R}$ avec la règle $i^2 = -1$. On regroupe ensuite les parties réelles d'un côté et les parties imaginaires de l'autre. Les règles de calcul sont en tout point similaires à $\mathbb{R}$:

$$\begin{gathered} z + z' = z' + z \qquad zz' = z'z \\ z(z' + z'') = zz' + zz'' \\ 0 \times z = 0 \qquad 1 \times z = z \end{gathered}$$

Pour $n \in \mathbb{Z}$, on notera

$$z^n := \begin{cases} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} z & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \text{ et } z \neq 0 \\ \displaystyle\prod_{k=1}^{|n|} \frac{1}{z} & \text{si } n \leq -1 \text{ et } z \neq 0 \end{cases}$$

Pour 0^0, la situation est la même que dans $\mathbb{R}$: on n'a pas le droit de l'écrire a priori.

Exemple.

1. Calculer i^3, i^4, i^5, i^6.
2. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, calculer $(a + i b)^2$ et $(a - i b)^2$.

2.2 Formules de sommation

Comme dans les réels, si en développant une somme $\displaystyle\sum_{\dots}^{\dots} \dots$, on doit écrire z^0, on écrira 1 à la place. Les formules sommatoires du chapitre précédent se généralisent à des nombres complexes :

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.
$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$.
$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} \qquad \text{(avec la convention } 0^0 = 1)$$
- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{C}$.
$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad \text{(avec la convention } 0^0 = 1)$$

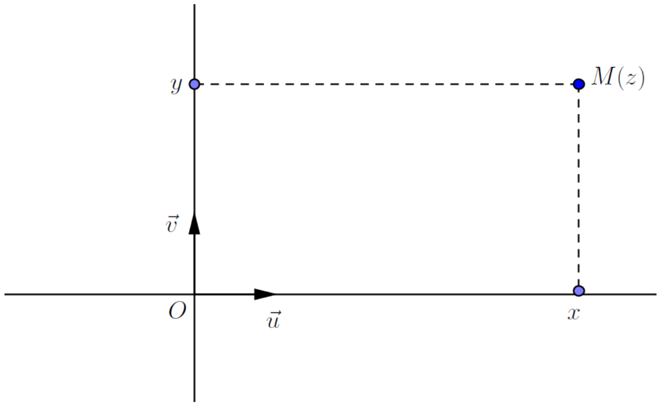
La démonstration de ces résultats est identique au cas réel. Ce sera souvent (mais pas toujours) le cas avec les complexes.

2.3 Aparté : interprétation géométrique

On appelle plan complexe le plan usuel avec un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point M de coordonnées (x, y) dans $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on associe le complexe $z = x + iy$. On dit que z est l'affixe de M.

Réciproquement M est appelé l'image de z dans le plan complexe.



2.4 Conjugué

Définition 3.5

Soit $z = a + ib$ un complexe. Le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le complexe

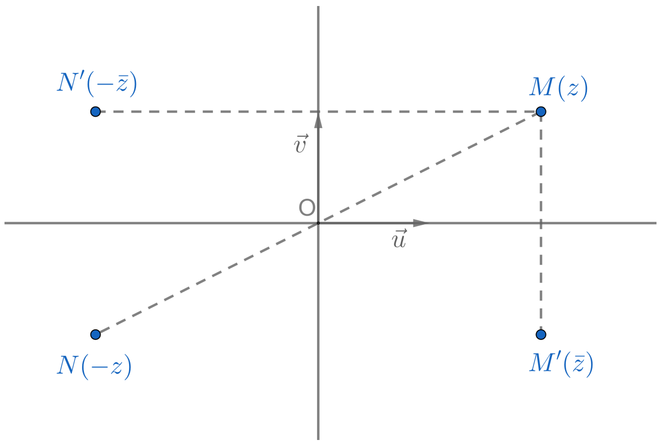
$$\overline{z} = a - ib$$

Soit M un point du plan complexe d'affixe z dans le plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Un point M' est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O\vec{u})$ si et seulement si M' a pour affixe $\overline{z}$.

Un point N est le symétrique de M par rapport à l'origine O si et seulement si N a pour affixe $-z$.

Un point N' est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O\vec{v})$ si et seulement si N' a pour affixe $-\overline{z}$.



Proposition 3.6

Soient $z, w \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes :

1. $\overline{\overline{z}} = z$
2. $$\mathrm{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2} \quad \mathrm{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$
3. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ et $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$
4. Si $w \neq 0$, $$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$$
5. Pour $n \in \mathbb{Z}$, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$

Démonstration. Par l'interprétation géométrique, excepté les propriétés avec une multiplication ou une division, où il faut passer par la forme algébrique. □

Proposition 3.7 (Caractérisation des réels et imaginaires purs par le conjugué)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$

3 Module

3.1 Définition du module et de l'inverse

Définition 3.8

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle module de z, noté $|z|$, le réel

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$$

Cette notation est cohérente avec la valeur absolue : si $z = a + 0i \in \mathbb{R}$, son module et sa valeur absolue coïncident et valent tous les deux $\sqrt{a^2}$.

Pour tout $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on peut écrire une sorte d'identité remarquable :

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Si $z \neq 0$, alors $|z| \neq 0$ et on peut écrire

$$z \times \frac{\bar{z}}{|z|^2} = 1$$

Cela permet de trouver facilement l'écriture algébrique de $\frac{1}{z}$:

Proposition 3.9 (Inverse et division de nombres complexes)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 0$, alors on définit

$$\frac{1}{z} := \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}$$

et si $w \in \mathbb{C}$, alors $\frac{w}{z} := w \times \frac{1}{z}$.

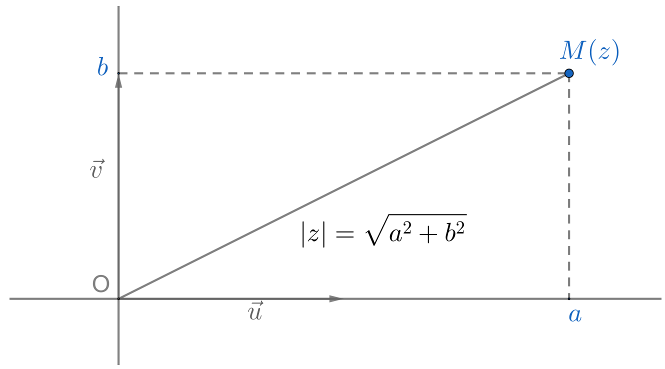
Exemple. Mettre sous forme algébrique $\frac{1}{2+i}$, $\frac{1+i}{1-i}$, $\frac{1}{i}$.

Soit M un point du plan complexe d'affixe z dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On peut interpréter $|z|$ comme étant la distance OM, notée également $||\overrightarrow{OM}||$.

Si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ sont deux points du plan complexe, on définit l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par le complexe $z_B - z_A$. Ce vecteur aura pour longueur $|z_B - z_A|$.

On notera que $\overrightarrow{OM}$ a bien pour longueur $|z-0| = |z| = OM$.



Exemple. Calculer le module des complexes $i, -3, 3+2i$.

3.2 Propriétés du module

Proposition 3.10 (Propriétés du module)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $|\bar{z}| = |z| = |-z|$
3. $z\bar{z} = |z|^2$
4. $|\mathrm{Re} z| \leq |z|$ et $|\mathrm{Im} z| \leq |z|$
5. $|zz'| = |z|\,|z'|$
6. Si $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
7. Identité remarquable :
$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$$
8. **Première inégalité triangulaire** :
$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$
De plus, $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z' = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z = \lambda z'$.
9. Seconde inégalité triangulaire :
$$\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$$

Démonstration. Les propriétés **1** à **6** se démontrent en passant par la forme algébrique (mais l'interprétation géométrique aide à se souvenir de la plupart).
Montrons **7** :

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2 &= (z+z')\overline{(z+z')} \\
&= (z+z')(\bar{z}+\overline{z'}) \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \bar{z}z' \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} \\
&= |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})
\end{aligned}$$

Montrons **8**. D'une part, par la propriété 7

$$|z+z'|^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2\mathrm{Re}(z\overline{z'})$$

et d'autre part

$$\big(|z| + |z'|\big)^2 = |z|^2 + |z'|^2 + 2|z|\,|z'|$$

Or, par 4, on a $\mathrm{Re}(z\overline{z'}) \leq \left|\mathrm{Re}(z\overline{z'})\right| \leq \left|z\overline{z'}\right| = |z|\,|z'|$. Ainsi

$$0 \leq |z+z'|^2 \leq \big(|z| + |z'|\big)^2$$

et en passant à la racine carré, qui est une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit l'inégalité voulue.

Montrons maintenant le cas d'égalité. Si $z' = 0$, l'équivalence est évidente. On supposera donc $z' \neq 0$ dans la suite et on montrera que

$$|z+z'| = |z|+|z'| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z = \lambda z'$$

On procède par double implication, en commençant par l'implication réciproque. Supposons qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $z = \lambda z'$. Alors

$$|z+z'| = |(\lambda+1)z'| = (\lambda+1)\,|z'| = \lambda|z'|+|z'| = |\lambda z'|+|z'| = |z|+|z'|$$

et on donc l'égalité voulue.
Montrons maintenant l'implication directe. Supposons que $|z+z'| = |z|+|z'|$. Alors

$$|z+z'|^2 = \left(|z|+|z'|\right)^2$$

A partir des expressions de ces deux termes vues plus haut, on en déduit

$$\mathrm{Re}(z\overline{z'}) = |z|\,|z'|$$

Ainsi $\mathrm{Re}w = |w|$ avec $w = z\overline{z'}$. On affirme qu'alors $w \in \mathbb{R}_+$. En effet, si on pose $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $w = a+ib$, la relation $\mathrm{Re}w = |w|$ se réécrit

$$a = \sqrt{a^2+b^2}$$

D'une part, nécessairement $a \geq 0$. D'autre part, en passant au carré, on obtient $a^2 = a^2+b^2$, d'où $b = 0$. Ainsi, $w = a \in \mathbb{R}_+$. En posant $\lambda = w \geq 0$, on en déduit

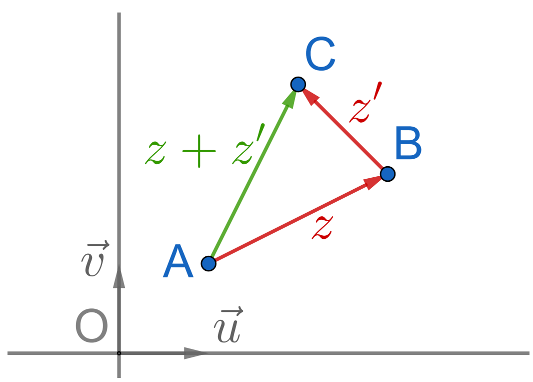
$$\begin{aligned}
&\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z\overline{z'} = \lambda \\
\implies &\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z|z'|^2 = \lambda z' \\
\implies &\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad z = \frac{\lambda}{|z'|^2} z' \ \text{ car } z' \neq 0 \\
\implies &\exists \lambda' \in \mathbb{R}_+ \quad z = \lambda' z'
\end{aligned}$$

On a donc démontré l'implication directe. Il y a donc équivalence. □

Soient A, B, C trois points du plan complexe. Si z est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ et z' celui de $\overrightarrow{BC}$ alors $z+z'$ est l'affixe de $\overrightarrow{AC}$.

L'inégalité triangulaire $|z+z'| \leq |z|+|z'|$ porte bien son nom : elle traduit que la distance AC est inférieure à $AB+BC$. Le chemin le plus court de A à C est donc le segment $[AC]$.

Il n'y a égalité que entre ces distances que si B est sur le segment $[AC]$: cela signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ ont la même "direction" et donc $z = \lambda z'$ (ou $z' = 0$ et alors $B = C$).



ATTENTION ! Ne JAMAIS écrire d'inégalités avec des complexes ! Si $z \in \mathbb{R}$, on peut écrire "$z \leq \ldots$" ou "$z \geq \ldots$". Ce n'est plus le cas si $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Par exemple on ne doit pas écrire $\cancel{4i \geq 2i}$. De même, le signe d'un complexe n'a aucun sens. Comme le module est un réel, toutes les inégalités qu'on a écrites plus haut ont un sens. Si vous écrivez $z \geq 0$, on comprend que z est un *réel* positif.

Proposition 3.11 (Caractérisation des réels et imaginaires pur par le module)

Soit $z \in \mathbb{C}$.

- $z \in \mathbb{R}_+ \iff z = |z|$
- $z \in \mathbb{R}_- \iff z = -|z|$

- $z \in i\mathbb{R} \iff z = i|z|$ ou $z = -i|z|$

Proposition 3.12 (Cercle et disque)

Soit A un point du plan complexe d'affixe $a \in \mathbb{C}$, et $r \geq 0$. L'ensemble

$$C(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| = r\}$$

correspond au cercle de centre A et de rayon r. L'ensemble

$$D(a,r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leq r\}$$

correspond au disque de centre A et de rayon r.

4 Forme trigonométrique

4.1 Nombres complexes de module 1

Définition 3.13

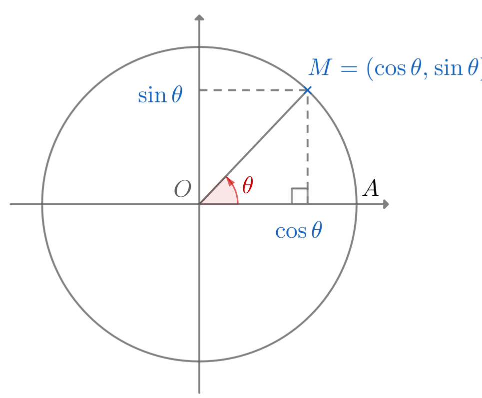
On appelle cercle unité ou cercle trigonométrique l'ensemble

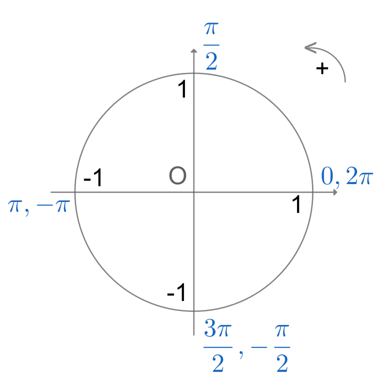
$$\mathbb{U} := C(0,1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Pour tout point M du cercle unité, il existe un réel θ correspondant à la mesure *orientée* de l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$:

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \text{abscisse de } M & -1 \leq \cos\theta \leq 1 \\ \sin\theta &= \text{ordonnée de } M & -1 \leq \sin\theta \leq 1 \end{aligned}$$

Plutôt que d'exprimer l'angle θ en degrés, en prépa on utilise les *radians*. La valeur θ correspond alors à la longueur (avec un signe) de l'arc de cercle $\overset{\frown}{AM}$.





Comme le cercle unité est de rayon $R = 1$, sa circonférence totale vaut $2\pi R = 2\pi$. Cela revient à poser 2π rad $= 360°$, ou encore π rad $= 180°$.

Sur la figure de droite, on indique en bleu la position du point M pour différentes valeurs de θ. Le point M étant fixé, le réel θ n'est pas unique :

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta' = \theta + 2k\pi \implies \begin{cases} \cos\theta' = \cos\theta \\ \sin\theta' = \sin\theta \end{cases}$$

Souvent, on impose comme condition que $\theta \in]-\pi, \pi]$ pour avoir unicité de cet angle.

Orientation des angles. ATTENTION, les angles sont *orientés* : avec la convention $\theta \in]-\pi,\pi]$, sur la figure, $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM}) = \theta > 0$ car on tourne *dans le sens inverse des aiguilles d'une montre*.
Si M' est le symétrique de M par rapport à (OA), alors $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OM'}) = -\theta < 0$ car on tourne *dans le sens des aiguilles d'une montre*.

Par ce qui précède, on a obtenu la propriété suivante :

Proposition 3.14

Soit $z \in \mathbb{U}$ d'écriture algébrique $z = x + iy$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

Le réel θ est unique modulo 2π, ou unique si l'on impose $\theta \in]-\pi,\pi]$.

Le triangle rectangle formé par le point M (voir première figure) a une hypoténuse de longueur 1 et des côtés de longueur $|\cos\theta|$ et $|\sin\theta|$. Ainsi par le théorème de Pythagore, $1^2 = |\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2$, càd

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

Il y a bien d'autres formules à savoir en trigonométrie. On renvoie au **formulaire de Trigonométrie** distribué (et disponible en ligne).

4.2 L'exponentielle $e^{i\theta}$

Définition 3.15 (Notation exponentielle)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On introduit la notation

$$\boxed{e^{i\theta} := \cos\theta + i\sin\theta}$$

Proposition 3.16 (Relation fondamentale)

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}}$$

Démonstration. En passant à la partie réelle dans cette relation, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(\theta+\theta') &= \mathrm{Re}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta')\right] \\ &= \cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' \end{aligned}$$

qui est vraie (voir formule de trigonométrie [1]). De même en passant à la partie imaginaire, on trouve

$$\sin(\theta+\theta') = \cdots = \sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'$$

qui est vraie également. Ainsi ces deux nombres complexes ont les mêmes parties réelles et imaginaires et sont donc égaux. □

1. Si on est rigoureux, il faudrait démontrer ces propriétés de trigonométrie avant de pouvoir les utiliser. Il n'est pas essentiel de savoir le démontrer et on ne les démontrera pas. Si on vous le demande en exercice, on vous guidera.

Proposition 3.17 (Propriétés de l'exponentielle complexe)

Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

1. $e^{i2k\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
2. $|e^{i\theta}| = 1$ donc en particulier $e^{i\theta} \neq 0$.
3. $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
4. $e^{i(\theta-\theta')} = \dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$

Proposition 3.18 (Formules d'Euler et de Moivre)

- **(Formules d'Euler)** Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

- **(Formule de Moivre)** Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

4.3 Application à la trigonométrie

Méthode (Linéarisation)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on veut transformer $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en somme de $\cos(k\theta)$ et/ou $\sin(k\theta)$ avec $k \in \mathbb{N}$.

- Par les formules d'Euler, on exprime $\cos^n\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$, idem si c'est $\sin^n t$.
- On développe avec la formule du binôme de Newton
- On regroupe les exponentielles conjuguées ($e^{ik\theta}$ avec $e^{-ik\theta}$), en appliquant Euler dans l'autre sens.

Exemple. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, linéariser $\cos^3\theta$.

Méthode (Délinéarisation)

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$, on veut transformer $\cos(nt)$ ou $\sin(nt)$ en somme puissance de $\cos^k t$ et/ou $\sin^k t$ avec $k \in \mathbb{N}$

- On utilise la formule de Moivre : $\cos(nt) = \mathrm{Re}\left(e^{int}\right) = \mathrm{Re}\left((\cos t + i\sin t)^n\right)$, idem si c'est $\sin(nt)$.
- On développe $(\cos t + i\sin t)^n$ avec la formule du binôme de Newton
- On identifie la partie réelle (si on veut $\cos(nt)$) ou la partie imaginaire (si on veut $\sin(nt)$).
- On transforme éventuellement les sin et cos avec $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$.

Exemple. Pour $t \in \mathbb{R}$, exprimer $\cos(4t)$ en fonction de $\cos t$.

Méthode (Angle moitié)

Soit a, b deux réels. On veut factoriser $e^{ia} \pm e^{ib}$.

- $e^{ia}+e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}+e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)=2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$
- $e^{ia}-e^{ib}=e^{i\frac{a+b}{2}}\left(e^{i\frac{a-b}{2}}-e^{-i\frac{a-b}{2}}\right)=2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}}$

Exemple. Pour $n\in\mathbb{N}$, calculer $C=\sum_{k=0}^{n}\cos(kt)$ et $S=\sum_{k=0}^{n}\sin(kt)$.

4.4 Argument, forme trigonométrique

Définition 3.19 (Forme trigonométrique)

Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z\neq 0$. Alors $\frac{z}{|z|}$ est de module 1. Donc, il existe $\theta\in\mathbb{R}$ tel que

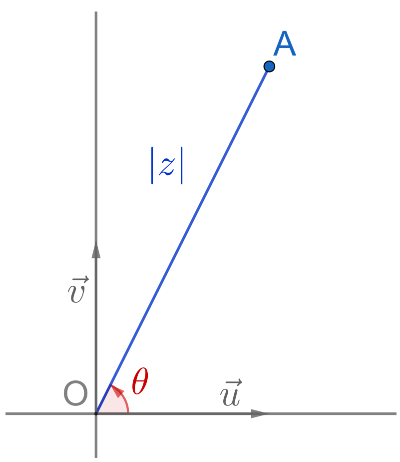
$$\frac{z}{|z|}=e^{i\theta}$$

Ce réel θ est appelé UN argument de z, noté $\arg z$. L'écriture

$$z=re^{i\theta}=r(\cos\theta+i\sin\theta)\qquad r=|z|>0,\ \theta\in\mathbb{R}$$

est appelée forme trigonométrique ou forme exponentielle de z.

Si A est un point d'affixe $z\neq 0$, l'angle orienté $(\vec{u},\overrightarrow{OA})$ est un argument de z.



Mais ce n'est pas le seul argument : $\arg(z)+2k\pi$ est aussi un argument de z, pour tout $k\in\mathbb{Z}$.

Ainsi, la forme trigonométrique *n'a pas une écriture unique* : si $z=re^{i\theta}$ alors nécessairement $r=|z|>0$ mais θ n'est défini que modulo 2π.

Si on impose la condition $\theta\in]-\pi,\pi]$ ou $\theta\in[0,2\pi[$, alors l'écriture devient unique.

Attention au fait que la forme trigonométrique n'est pas définie pour $z=0$.

Exemple.

- $\arg 1\equiv 0\ [2\pi]$
- $\arg i\equiv\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $\arg(-i)\equiv-\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Exemple. Mettre sous forme trigonométrique $z=-1+i\sqrt{3}$.

Proposition 3.20 (Calculs avec arg**)**

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors

- $\arg z \equiv 0\ [2\pi] \iff z \in \mathbb{R}_+^*$
- $\arg z \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}^*$
- $\arg z \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}^*$
- $\arg \bar{z} \equiv -\arg z\ [2\pi]$
- $\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z'\ [2\pi]$
- $\arg \dfrac{z}{z'} \equiv \arg z - \arg z'\ [2\pi]$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg z\ [2\pi]$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$

Démonstration. En utilisant les propriétés de $e^{i\theta}$. □

Proposition 3.21 (Égalité sous forme trigo)

Soient $re^{i\theta}$ et $Re^{i\varphi}$ deux complexes non nuls sous forme trigonométrique.

$$re^{i\theta} = Re^{i\varphi} \iff \begin{cases} r = R \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \theta = \varphi + 2k\pi \end{cases}$$

Proposition 3.22 (Calculs sous forme trigo)

Soient $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$ deux complexes (non nuls) sous forme trigonométrique. Alors

1. $zz' = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$
3. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$
4. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $z^n = r^n e^{in\theta}$

De manière générale, la forme trigonométrique marche bien avec les calculs de produits, divisions et puissances. Par contre elle est très mauvaise pour les additions et soustractions : mieux vaut passer par la forme algébrique.

Méthode (Transfomer $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t-\varphi)$)

- Écrire $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\right)$.
- Déterminer φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- Factoriser la parenthèse en $\cos(t-\varphi)$, et ainsi $A = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple. Mettre $\cos t + \sin t$ sous la forme $A\cos(t-\varphi)$.

Remarque. C'est assez utile en physique et en SI : A est l'amplitude et φ est la phase.

5 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

5.1 Racine carrée d'un nombre complexe

Définition 3.23

Soit $z \in \mathbb{C}$. $\omega \in \mathbb{C}$ est une racine carrée de z si $z = \omega^2$.

Théorème 3.24

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $z \neq 0$, alors z admet exactement deux racines carrées. Si ω est une racine carrée, l'autre est $-\omega$.
$z = 0$ a une unique racine carrée : $\omega = 0$.

Démonstration. La preuve est basée sur la méthode ci-dessous. □

Méthode (Calcul d'une racine carrée)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On cherche ω tel que $z = \omega^2$

- Sous forme algébrique : on raisonne par implication en posant $\omega = a + i\,b$, en résolvant

$$\begin{cases} \mathrm{Re} z = \mathrm{Re}(\omega^2) = a^2 - b^2 \\ |z| = |\omega|^2 = a^2 + b^2 \end{cases}$$

  ce qui détermine a^2, b^2. Ensuite :

  – Il y a alors deux valeurs possibles : $a = \pm a_0$ et $b = \pm b_0$ avec $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Cela fait quatre couples (a, b) possibles en tout :

$$(a_0, b_0), \quad (a_0, -b_0), \quad (-a_0, b_0), \quad (-a_0, -b_0)$$

  Il y a deux "bons" couples qui donnent une racine carrée et deux "intrus" (sauf si $a_0 = 0$ ou $b_0 = 0$: dans ce cas, il n'y a que deux couples, tous les deux bons).

  – On choisit une valeur pour a, par exemple $a = +a_0$, et on détermine si $b = +b_0$ ou si $b = -b_0$ en utilisant le fait que $\mathrm{Im} z = \mathrm{Im}\left(\omega^2\right) = 2ab = 2a_0 b$.

  – Si $\omega = a + ib$ est une racine carrée de z, l'autre est $-\omega = -a - ib$.

- Sous forme trigonométrique $z = re^{i\theta}$: les racines sont simplement

$$\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \qquad -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} = \sqrt{r}e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}$$

On comprend donc aisément l'intérêt de mettre z sous la forme trigonométrique pour trouver une racine carrée de z.

Exemple. Déterminer les racines carrées dans $\mathbb{C}$ de $z = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$ et de $z = 8 - 6i$.

5.2 Équations du second degré à coefficients complexes

On considère l'équation

$$(E): \quad az^2 + bz + c = 0$$

où

- $a \in \mathbb{C}^*$ et $b, c \in \mathbb{C}$ sont les coefficients de l'équation (E).
- $z \in \mathbb{C}$ est l'inconnue à déterminer.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = az^2 + bz + c$ le trinôme du second degré associé à (E). On cherche donc les racines complexes de P.

Théorème 3.25

On considère l'équation (E) et on introduit la quantité

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

appelée <u>discriminant</u> du trinôme P.

- Si $\Delta \neq 0$, (E) a deux solutions distinctes

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}$$

  où δ est une racine carrée de Δ (l'autre étant $-\delta$).
- Si $\Delta = 0$, (E) a une unique solution $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Remarque. Dans le cas $\Delta \neq 0$, on a la factorisation du trinôme :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Dans le cas $\Delta = 0$, on a la factorisation

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad P(z) = a(z - z_0)^2$$

Exemple. Résoudre $z^2 + (2+i)z - \dfrac{5}{4} + \dfrac{5}{2}i = 0$.

Proposition 3.26 (Somme et produit des racines)

1. On note z_1 et z_2 les deux solutions de (E), éventuellement confondues dans le cas $\Delta = 0$. Alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}.$$

2. Soient $S, P \in \mathbb{C}$. Les solutions complexes du système

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = S \\ z_1 z_2 = P \end{cases}$$

   sont exactement les solutions de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$.

Proposition 3.27 (Factorisation et racine)

Soit P un polynome à coefficients complexes de degré $n \geq 1$. Si P admet a pour racine, càd si $P(a) = 0$, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que

$$P(z) = (z-a)Q(z)$$

Pour trouver Q, on peut procéder par identification

Exemple. Résoudre $z^3 + 2z^2 + 2z + 1 = 0$.

5.3 Racines n-ième

Définition 3.28

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n-ième de a tout nombre complexe z tel que

$$z^n = a$$

Définition 3.29

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Un nombre complexe ω vérifiant $\omega^n = 1$ est appelé racine n-ième de l'unité. On note

$$\mathbb{U}_n = \{\omega \in \mathbb{C} \mid \omega^n = 1\}$$

l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Proposition 3.30 (Détermination de $\mathbb{U}_n$)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\boxed{\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}} \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\}}$$

Les complexes $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ sont les racines n-ième de l'unité.

1 est toujours une racine n-ième de l'unité. On a vu que $i^4 = 1$ donc i est une racine 4-ième de l'unité. C'est aussi une racine 8-ième de l'unité puisque $i^8 = i^4 i^4 = 1$.

Exemple. Résoudre $z^3 = 1$.

Théorème 3.31 (Calcul d'une racine n-ième)

Soit $a \in \mathbb{C}^*$. L'équation $z^n = a$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement n solutions distinctes, appelées racines n-ièmes de a.
Si $a = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, alors

$$z^n = a = re^{i\theta} \iff \left(\exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega_k\right)$$

Remarque. En particulier, on notera que

$$\forall z, z' \in \mathbb{C} \qquad z^n = (z')^n \iff \left(\exists k \in [\![0, n-1]\!] \quad z = z'\omega_k\right)$$

Exemple. Résoudre $z^3 = 27i$.

5.4 Exponentielle complexe

Définition 3.32

Soit $z \in \mathbb{C}$. Le complexe exponentielle de z, noté e^z ou $\exp(z)$ est défini par

$$e^z = e^{\mathrm{Re}z} e^{i\,\mathrm{Im}z}$$

La forme trigonométrique e^z est donnée par $|e^z| = e^{\mathrm{Re}z}$ et $\arg(e^z) = \mathrm{Im}z$.

Proposition 3.33 (Propriétés d'exponentielle complexe)

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$,

1. $e^z \in \mathbb{C}^*$
2. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.
3. $$e^{z+z'} = e^z e^{z'} \quad \text{et} \quad e^{z-z'} = \frac{e^z}{e^{z'}}$$
4. $$\begin{aligned} e^z = e^{z'} &\iff \left(\mathrm{Re} z = \mathrm{Re} z' \quad \text{et} \quad \mathrm{Im} z \equiv \mathrm{Im} z' \; [2\pi]\right) \\ &\iff \left(\exists k \in \mathbb{Z} \quad z - z' = i \times 2k\pi\right) \end{aligned}$$

Exemple. Résoudre $e^z = \sqrt{3} + i$.

6 Géométrie

On se place dans un plan complexe.

6.1 Alignement, orthogonalité de vecteurs

Proposition 3.34

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs d'affixes respectives $u, v \in \mathbb{C}^*$.

$$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \arg\left(\frac{v}{u}\right) \equiv \arg v - \arg u \; [2\pi]$$

En particulier, si A, B, C, D sont quatre points distincts du plan d'affixes a, b, c, d, alors

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \arg\left(\frac{d-c}{b-a}\right) \; [2\pi]$$

Démonstration. Il suffit de faire un dessin. Pour le cas particulier, prendre $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ d'affixe $b - a$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ d'affixe $d - c$ (ces deux affixes sont non nulles car A, B, C, D sont supposés distincts). □

Proposition 3.35

Soient A, B, C trois points distincts du plan d'affixes a, b, c.

$$\begin{aligned} A, B, C \text{ sont alignés} &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv 0 \; [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (AB) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires en } A &\iff (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \; [\pi] \\ &\iff \frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R} \end{aligned}$$

Remarque. Dans un exercice de géométrie complexe, un calcul du quotient du type $\frac{c-a}{b-a}$ est souvent le coeur du problème.

Exemple. Soient A, B, C des points d'affixes respectives $a = -1+i$, $b = 2i$ et $c = 2-2i$. Donner la nature du triangle ABC.

6.2 Transformations du plan

Une transformation du plan complexe est une *bijection* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Nous définirons dans un chapitre ultérieur ce qu'est une bijection. Pour fixer les idées, le fait que f soit une bijection signifie qu'on peut "inverser" f : on peut construire une fonction notée $f^{-1} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(f^{-1} \circ f)(z) = z$. Autrement dit, on peut toujours revenir au point de départ.

Translations

Proposition 3.36 (Translations)

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe a. Alors, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation

$$\tau : z \mapsto z + a$$

Son inverse est la translation de vecteur $-\vec{u}$, d'affixe $-a$:

$$\tau^{-1} : z \mapsto z - a$$

Homothétie

Proposition 3.37 (Homothéties)

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, l'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation

$$h : z \mapsto kz \qquad h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{k} z$$

Si O' est un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, l'homothétie de centre O' et de rapport k est la transformation

$$h_\omega : z \mapsto z' := k(z - \omega) + \omega$$

Pour h_ω. Si on note $M(z)$ et $M'(z')$ l'image de M par h_ω, alors on remarque que

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

c'est-à-dire $\overrightarrow{O'M'} = k\overrightarrow{O'M}$: on a effectivement réalisé une homothétie de centre O' et de rapport k. □

Rotations

Proposition 3.38 (Rotations)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, la rotation de centre O et d'angle orienté θ est la transformation

$$\rho : z \mapsto e^{i\theta} z \qquad \rho^{-1} : z \mapsto e^{-i\theta} z$$

Si O' un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, la rotation de centre O' et d'angle orienté θ est la transformation

$$\rho_\omega : z \mapsto z' := e^{i\theta}(z - \omega) + \omega$$

Similitudes directes

Définition 3.39

On dit que $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $s(z) = az + b$.

Remarque.

- Si $a = 1$, s est la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe b.
- Si $a \neq 1$, s admet un point fixe ω égal à $\dfrac{b}{1-a}$.
  s est alors la composée de l'homothétie h_ω de centre ω et de rapport $|a|$ et de la rotation ρ_ω de centre ω et d'angle θ tel que $\arg a \equiv \theta \ [2\pi]$. L'ordre de composition importe peu : exceptionnellement ici, $h_\omega \circ \rho_\omega = \rho_\omega \circ h_\omega$.

Symétrie axiale d'axe réel

Proposition 3.40

La symétrie axiale selon l'axe des abscisses (ou axe réel) est l'application $z \mapsto \bar{z}$.

On notera que ce n'est pas une similitude directe. Il s'agit en fait d'une *similitude indirecte*, car elle transforme un angle θ en $-\theta$. Mais cela n'est pas au programme.