Chapitre 20

Intégration

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. De plus, a, b sont deux réels tels que $a < b$.

1 Construction de l'intégrale

1.1 Fonctions en escalier

Définition 20.1 (Subdivision d'un segment, pas)

Étant donné un segment $[a,b]$, on appelle <u>subdivision</u> de $[a,b]$ une famille *finie* $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de réels avec $n \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$$

On appelle <u>pas</u> de la subdivision l'écart maximal entre deux points consécutifs :

$$\max_{0 \leq i \leq n-1} (a_{i+1} - a_i) > 0$$

On note typiquement une telle famille $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$. Elle permet de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en une partition :

$$\{a_0\} \cup]a_0, a_1[\cup \{a_1\} \cup]a_1, a_2[\cup \cdots \cup \{a_{n-1}\} \cup]a_{n-1}, a_n[\cup \{a_n\}$$

Définition 20.2 (Fonction en escalier)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est <u>en escalier</u> s'il existe une subdivision *finie* $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f soit constante sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!] \qquad \exists p_i \in \mathbb{R} \qquad \forall x \in]a_i, a_{i+1}[\qquad f(x) = p_i$$

Une telle subdivision σ est dite <u>adaptée</u> à f.
On note $\mathcal{E}([a,b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On notera que l'on n'impose aucune condition sur la valeur de f aux points a_i (excepté que f doit être définie en ces points).

Exemple 1. Toute fonction constante est en escalier. La fonction partie entière est en escalier.

Exemple 2. Les fonctions suivantes sont en escalier.

Exemple 3. La fonction id : $x \mapsto x$ et la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$:

$$1_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

ne sont pas des fonctions en escalier.

Remarque. Il existe de nombreuses subdivisions adaptées à une même fonction f : par exemple si on rajoute un autre point à une subdivision adaptée, la nouvelle subdivision est aussi adaptée.

Proposition 20.3

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

En particulier, la somme, la différence, la multiplication par un scalaire et le produit de fonctions en escalier reste une fonction en escalier.

1.2 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 20.4 (Intégrale d'une fonction en escalier)

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$. On pose $\sigma = (a_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. On définit l'intégrale de f par

$$\int_a^b f := \sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)p_i \quad \in \mathbb{R}$$

où $p_i \in \mathbb{R}$ est la valeur de f sur l'intervalle $]a_i,a_{i+1}[$.

Plusieurs notations sont possibles : $\displaystyle\int_a^b f = \int_{[a,b]} f = \int_a^b f(t)dt$.

La valeur $\displaystyle\int_a^b f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée σ que l'on choisit. Par ailleurs, l'intégrale de f ne dépend pas des valeurs de $f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n)$.

Théorème 20.5 (Propriétés de l'intégrale (fonctions en escalier))

Soit $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ des fonctions en escalier. Alors :

- Linéarité : pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est en escalier et

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha\int_a^b f + \beta\int_a^b g$$

- Positivité : si $f \geq 0$ alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- Croissance : si $f \leq g$ alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Chasles : soit $c \in]a,b[$. Alors f est en escalier sur $]a,c[$ et $]c,b[$ et $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
- Inégalité triangulaire : la fonction $|f|$ est en escalier et

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$$

1.3 Fonctions continues par morceaux

Définition 20.6 (Fonction continues par morceaux)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision *finie* $\sigma = (a_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a,b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

1. La fonction f est continue sur chaque intervalle $]a_i, a_{i+1}[$.
2. On peut prolonger f par continuité en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$.

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.
On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, f est continue par morceaux si elle n'admet qu'un nombre *fini* de points de discontinuité, et si f admet en tout point de discontinuité une limite à gauche et une limite à droite qui sont finies (mais pas forcément identiques).

Exemple 4. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux.

Exemple 5. Les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

Exemple 6. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$ car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

Proposition 20.7

$\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{[a,b]}, +, \times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

1.4 Intégrale des fonctions continues par morceaux

Lemme 20.8

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$$

Démonstration. La construction précise de g est hors-programme (mais on peut le voir sur un dessin) :

$\square$

Théorème 20.9 (Intégrale d'une fonction continues par morceaux)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus la limite ne dépend pas de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

On définit l'intégrale de f sur $[a,b]$ par :

$$\int_a^b f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

Démonstration. Par le lemme qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$ si on pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1}$, il existe une fonction $g_n \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

On dispose donc d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\alpha_n := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On dit alors que "(g_n) converge uniformément vers f sur $[a,b]$".

- Montrons que $\left(\int_a^b g_n\right)$ est bornée. Comme $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, la fonction f est bornée par une constante $M \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
|g_n(x)| &= |g_n(x) - f(x) + f(x)| \\
&\leq |g_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\
&\leq \alpha_n + M
\end{aligned}$$

  Ainsi, (par inégalité triangulaire) on a :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| &\leq \int_a^b |g_n(x)|\, dx \\
&\leq \int_a^b (\alpha_n + M)\, dx \\
&\leq (\alpha_n + M) \times (b-a)
\end{aligned}$$

  Or, la suite (α_n) est convergente, donc bornée. On en déduit que $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

-

- Enfin, il faut montrer que la limite ℓ trouvée ne dépend pas de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que

$$\beta_n := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-h_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On montre alors de même que $\int_a^b h_n \to \ell'$. Montrons que $\ell = \ell'$. Pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| &= \left|\int_a^b (g_n-h_n)\right| \\
&\leq \int_a^b |g_n-h_n| \\
&= \int_a^b |g_n-f+f-h_n| \\
&\leq \int_a^b |g_n-f| + \int_a^b |f-h_n| \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \beta_n \\
&= \alpha_n(b-a)+\beta_n(b-a)
\end{aligned}$$

Et donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \to 0$. Or, on a également $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \to \left|\ell-\ell'\right|$ par opérations sur les limites. D'où par unicité de la limite $|\ell-\ell'| = 0$, i.e. $\ell = \ell'$.

□

1.5 Extensions de l'intégrale

Si $b \leq a$, on définit

$$\int_a^b f := -\int_b^a f$$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'alors $\operatorname{Re} f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $\operatorname{Im} f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En particulier, on a déjà défini la notion de continuité par morceaux pour les fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.

Définition 20.10 (Intégrale si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$)

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont, et dans ce cas on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i\int_a^b \operatorname{Im} f \quad \in \mathbb{C}$$

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Résultats fondamentaux

Théorème 20.11 (Propriétés de l'intégrale)

Soit $f, g : [a,b] \to \mathbb{K}$ des fonctions continues par morceaux. Alors :

- Linéarité : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
- Positivité : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
- Croissance : si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \leq g$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
- Chasles : soit $c \in]a,b[$. Alors f est continue par morceaux sur $]a,c[$ et $]c,b[$ et
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
- Inégalité triangulaire : la fonction $|f|$ est continue par morceaux et
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Attention : les propriétés avec une inégalité ne sont vérifiées que si $a \leq b$. Par exemple, si $f : x \mapsto 1$
$$\left| \int_1^0 f \right| = \left| -\int_0^1 1 \right| = |-1| = 1 \qquad \text{mais} \qquad \int_1^0 |f| = -\int_0^1 1 = -1$$

Dans le cas général avec a, b quelconques, on peut écrire :
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

Idée de la preuve. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on prend une suite (h_n) de fonctions en escalier qui tend vers f. Ces propriétés étant vraies pour des fonctions en escalier, on démontre qu'elles le restent en passant à la limite. Une fois démontrées pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on les montre pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en les appliquant à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$.
Par exemple, pour l'inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme h_n est en escalier, on a vu que
$$\left| \int_a^b h_n \right| \leq \int_a^b |h_n| \tag{$*$}$$

Or, par continuité de la valeur absolue (ou du module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$),
$$\left| \int_a^b f \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \int_a^b h_n \right|$$

tandis que, pour tout $x \in [a,b]$,
$$\big||f(x)| - |h_n(x)|\big| \leq |f(x) - h_n(x)|$$

et donc en passant au supremum :

$$\sup_{x\in[a,b]} ||f(x)| - |h_n(x)|| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi, la suite $(|h_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformémqent vers f sur $[a,b]$: on en déduit comme dans la preuve du Théorème 20.9 que

$$\int_a^b |f| = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b |h_n|$$

Ainsi, en passant à la limite dans $(*)$, on a le résultat voulu. □

Corollaire 20.12

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. Si $|f| \leq M$ sur $[a,b]$, alors

$$\left|\int_a^b fg\right| \leq \int_a^b |f|\cdot|g| \leq M\int_a^b |g|$$

2.2 Cas des fonctions continues

On rappelle ici des résultats vus au chapitre 6 pour des fonctions continues ou de classe C^1. Ils ne se généralisent *pas* aux fonctions continues par morceaux, l'hypothèse de continuité de la fonction (ou de sa dérivée) est essentielle :

Théorème 20.13 (Théorème fondamental de l'analyse)

Soit I un intervalle, $f \in C^0(I,\mathbb{K})$ et $a \in I$. L'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Corollaire 20.14

Soit α, β deux fonctions dérivables sur un intervalle J à valeurs dans un intervalle I et $f \in C^0(I,\mathbb{K})$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : J &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt \end{aligned}$$

est dérivable et

$$\forall x \in J \qquad \varphi'(x) = \beta'(x)f(\beta(x)) - \alpha'(x)f(\alpha(x))$$

- Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

- Intégration par parties : soit $u, v \in C^1([a,b],\mathbb{K})$. Alors
$$\int_a^b u'(t)v(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)dt$$
- Changement de variable. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in C^0(I,\mathbb{K})$ et $\varphi \in C^1([a,b],I)$. Alors
$$\int_a^b (f\circ\varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

Proposition 20.15

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*, telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Alors, $f = 0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde que $f \neq 0$. Alors, il existe $x_0 \in [a,b]$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme $f \geq 0$, on peut poser $\varepsilon := f(x_0) > 0$. Par continuité de f en x, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]\cap[x_0-\eta, x_0+\eta]$, on a $f(x) \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Alors, on a $f \geq g$ avec
$$g : t \mapsto \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{si } t \in [a,b]\cap[x_0-\eta, x_0+\eta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
Alors,
$$\int_a^b f \geq \int_a^b g = \lambda\frac{\varepsilon}{2} > 0$$
avec $\lambda > 0$ la longueur du segment $[a,b]\cap[x_0-\eta, x_0+\eta]$. □

2.3 Compléments

Le résultat qui suit a été vu pour des fonctions continues. On peut l'étendre aux fonctions continues par morceaux :

Proposition 20.16

Soit $a > 0$ et f une fonction.

- Si $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.
- Si $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$.
- Si $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est T-périodique, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_b^{b+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt$.

Définition 20.17 (Valeur moyenne)

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On appelle valeur moyenne de f le scalaire
$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

La valeur moyenne de f correspond à la constante $\alpha \in \mathbb{K}$ telle que $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \alpha$.

3 Sommes de Riemann

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On peut considérer une subdivision de $[a,b]$ particulière qui le partage en n intervalles de même longeur : $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ avec

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \qquad x_i = a + i\frac{b-a}{n}$$

On pose alors la somme de Riemann associée à f comme étant la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

On comprend intuitivement que, lorsque n tend vers $+\infty$, la somme de Riemann (S_n) tend vers la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$. Dans les faits, cela fonctionne pour les fonctions continues, mais aussi pour les fonctions f continues par morceaux :

Théorème 20.18

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f \qquad \text{avec } S_n := \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f \qquad \text{avec } S'_n := \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple 7. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$.

4 Formules de Taylor globales

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 20.19 (Formule de Taylor avec reste intégral)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{K})$. Alors :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

Remarque. Cette formule est valable pour tout élément $x \in I$: elle a donc une validité “globale”. Ce n’est pas le cas de la formule de Taylor-Young, valide avec seulement $f \in C^p(I, \mathbb{K})$ et qui s’écrit

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^p)$$

Cette formule a une validité “locale” : elle ne fait que donner une information sur une limite quand x tend vers a, à savoir :

$$\frac{1}{(x-a)^p}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right) \xrightarrow[x\to a]{} 0$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- Si $p=0$, pour toute fonction $f \in C^1(I,\mathbb{K})$, on a (conséquence du TFA) :

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)dt$$

Ainsi, la propriété est vraie pour $p=0$.

- Supposons la propriété vraie pour un $p \in \mathbb{N}$. Montrons-la pour le rang $p+1$. Soit $f \in C^{p+2}(I,\mathbb{K})$. Alors a fortiori $f \in C^{p+1}(I,\mathbb{K})$, si bien que par l'hypothèse de récurrence :

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt$$

Appliquons une intégration par parties à la dernière intégrale :

$$\begin{cases} u'(t)=\dfrac{(x-t)^p}{p!} & v(t)=f^{(p+1)}(t) \\ u(t)=-\dfrac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!} & v'(t)=f^{(p+2)}(t) \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!}f^{(p+1)}(t)dt &= [u(t)v(t)]_a^x-\int_a^x u(t)v'(t)dt \\ &= 0-u(a)v(a)-\int_a^x \frac{-(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt \qquad \text{car } u(x)=0 \\ &= \frac{(x-a)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+1}(a)+\int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f(x)=\sum_{k=0}^{p+1}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k+\int_a^x \frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)!}f^{(p+2)}(t)dt$$

On a donc montré la propriété au rang $p+1$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout rang $p \in \mathbb{N}$. □

4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Théorème 20.20 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f \in C^{p+1}(I,\mathbb{K})$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{x\in I}\left|f^{(p+1)}(x)\right| \leq M$$

Alors,

$$\forall x \in I \qquad \left|f(x)-\sum_{k=0}^{p}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right| \leq M\frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Remarque. Si $p=0$, l'inégalité de Taylor-Lagrange se réécrit

$$|f(x)-f(a)| \leq M \times |x-a|$$

ce qui est une réécriture de l'inégalité des accroissements finis.

Démonstration. On peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f. On ne traite que le cas $x \geq a$:

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) dt \right| \\
&\leq \int_a^x \left| \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t) \right| dt \\
&= \int_a^x \left| \frac{(x-t)^p}{p!} \right| \times \left| f^{(p+1)}(t) \right| dt \\
&\leq \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \times M \, dt \qquad \text{car } x-t \geq x-a \geq 0 \\
&= \frac{M}{p!} \int_a^x (x-t)^p dt \\
&= \frac{M}{p!} \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)} \right]_a^x \\
&= \frac{M}{(p+1)!} \times (x-a)^{p+1}
\end{aligned}$$

□

5 Compléments

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur I si

$$\forall x \in I \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall y \in I \qquad (|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Définition 20.21 (Continuité uniforme)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x, y \in I \qquad (|x-y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$$

Avec cette écriture, le η dépend toujours de ε mais ne dépend plus ni de x, ni de y. Par exemple si $\varepsilon = 1$, cela signifie qu'il existe $\eta > 0$, qui est le même pour tous les points x, y, tels que

$$y \in [x-\eta, x+\eta] \quad \implies \quad |f(x) - f(y)| \leq 1$$

Intuitivement, l'uniforme continuité signifie que la distance $|f(y) - f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut tant que $|y-x|$ sera plus petit qu'une valeur η fixée qui est la même pour tous les points x, y.

Proposition 20.22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a les implications suivantes

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration. La deuxième implication est claire : si f est uniformément continue sur I, alors on peut trouver pour chaque $\varepsilon > 0$ un réel $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que la suite de l'assertion soit vérifiée. On transforme alors le quantificateur "$\forall x, y \in I$" en "$\forall x \in I \quad \forall y \in I$" puis on peut déplacer la quantificateur "$\forall x \in I$" au début de l'assertion. Ce faisant,

le η est alors autorisé à dépendre de x, mais on sait déjà qu'on peut le fixer indépendamment de x avec le choix $\eta(\varepsilon)$ sus-mentionné. On trouve ainsi que f est continue sur I.
Montrons la première implication. Supposons que f est K-lipchitzienne avec $K > 0$. Alors pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\eta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$. Alors, pour tous $x, y \in I$

$$|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq K\eta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue. $\square$

Théorème 20.23 (Théorème de Heine)

Si f est continue sur un segment $[a, b]$, alors f est uniformément continue.

Exemple 8. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[0, 1]$ car f est continue sur $[0, 1]$.

Exemple 9. Montrer que la fonction $f : x \mapsto x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Montrons la négation de l'uniforme continuité sur $\mathbb{R}$:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x, y \in \mathbb{R} \qquad |x - y| \leq \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

On pose $\varepsilon = 1$. Soit $\eta > 0$. Cherchons $x, y \in \mathbb{R}$ tels que z

$$|x - y| \leq \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(y)| > \varepsilon$$

On pose $y = x + \eta$, de sorte que la première inégalité est vraie, et la seconde se réécrit

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| > \varepsilon &\iff \left|x^2 - (x + \eta)^2\right| > \varepsilon \\ &\iff \left|\eta^2 + 2x\eta\right| > \varepsilon \\ &\iff |\eta + 2x| > \frac{\varepsilon}{\eta} \end{aligned}$$

Pour $x \in \mathbb{R}_+$ assez grand (en fonction de ε et η), cette inégalité est vérifiée. Donc f n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.