

# Chapitre 19

## Déterminants

### Plan du chapitre

<b>1</b>	<b>Forme <math>p</math>-linéaire alternée</b>	<b>2</b>
1.1	Forme bilinéaire (ou 2-linéaire)	2
1.2	Forme $p$ -linéaire.	3
1.3	Forme $n$ -linéaire alternée	4
1.4	Expression d'une forme $n$ -linéaire alternée	5
<b>2</b>	<b>Déterminant d'une famille de vecteurs</b>	<b>7</b>
2.1	Définition	7
2.2	Exemples en base canonique	8
<b>3</b>	<b>Déterminant d'une matrice carrée</b>	<b>9</b>
3.1	Définition et propriétés sur les colonnes	9
3.2	Propriétés sur les lignes	11
<b>4</b>	<b>Calcul pratique du déterminant</b>	<b>12</b>
4.1	Opérations élémentaires.	12
4.2	Développement selon une ligne / colonne, cas simple	13
4.3	Développement selon une ligne / colonne, cas général	16
<b>5</b>	<b>Déterminant d'un endomorphisme</b>	<b>18</b>
5.1	Définition	18
5.2	Propriétés algébriques du déterminant	19
5.3	Version matricielle des propriétés précédentes	20
<b>6</b>	<b>Applications du déterminant</b>	<b>21</b>
6.1	Déterminer si une famille est une base	21
6.2	Déterminer si une matrice $A$ est inversible, et formule de $A^{-1}$	22

#### Hypothèse

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .  
 $E, F$  désignent deux  $\mathbb{K}$ -e.v. et  $n, p$  sont des entiers de  $\mathbb{N}^*$ .

# 1 Forme $p$ -linéaire alternée

## 1.1 Forme bilinéaire (ou 2-linéaire)

### Définition 19.1 (Application bilinéaire)

On dit que  $f : E \times E \rightarrow F$  est une application bilinéaire si  $f$  est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables, c'est-à-dire :

- Pour tout  $x$  fixé dans  $E$ , l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ y &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

- Pour tout  $y$  fixé dans  $E$ , l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

Si de plus  $F = \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est une forme bilinéaire.

**Exemple 1.** Les applications suivantes sont toutes bilinéaires :

- L'application  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x, y) = xy$ .
- L'application  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $\varphi(M, N) = MN$ .
- L'application  $\varphi : C^0(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ .
- L'application  $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\varphi \left( \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

- L'application  $\varphi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$  définie par  $\varphi(f, g) = f \circ g$ .

### Proposition 19.2 (Expression de $f(u_1, u_2)$ selon une base de $E$ )

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f : E \times E \rightarrow F$  une application bilinéaire. Pour tous vecteurs  $u, v \in E$ , si on pose

$$u = \sum_{i=1}^n a_i e_i \quad v = \sum_{j=1}^n b_j e_j$$

alors on a

$$f(u, v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i b_j f(e_i, e_j)$$

En particulier, la donnée des  $f(e_i, e_j)$  pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  suffit à totalement déterminer l'application  $f$ .

*Démonstration.*

□

## 1.2 Forme $p$ -linéaire

On rappelle que  $p \in \mathbb{N}^*$  par hypothèse.

### Définition 19.3 (Forme $p$ -linéaire)

On dit que  $f : E^p \rightarrow F$  est une application  $p$ -linéaire (sur  $E$ ) si  $f$  est linéaire par rapport à chacune de ses  $p$  variables, c'est-à-dire :

- Pour toute famille  $(u_1, \dots, u_p) \in E^p$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} E &\rightarrow F \\ x &\mapsto f(u_1, \dots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \dots, u_p) \end{aligned}$$

Si  $F = \mathbb{K}$ , on dit que  $f$  est une forme  $p$ -linéaire.

Le  $p$  de cette définition est muet : on peut aussi parler d'application  $n$ -linéaire ou  $m$ -linéaire, etc. du moment que  $m, n$  ont été introduit.

**Exemple 2.** Les applications 1-linéaires sont exactement les applications linéaires.

Les applications 2-linéaires sont exactement les applications bilinéaires.

**Exemple 3.** L'application  $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x_1, \dots, x_p) = \prod_{k=1}^p x_k$  est une forme  $p$ -linéaire.

**Exemple 4.** L'application  $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^{2023} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  définie par  $\varphi(M_1, \dots, M_{2023}) = M_1 \dots M_{2023}$  est une application 2023-linéaire.

**Exemple 5.** L'application  $\varphi : C^0(\mathbb{R})^3 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(f, g, h) = \int_0^1 f(t)g(t)h(t)dt$  est une forme 3-linéaire.

### 1.3 Forme $n$ -linéaire alternée

#### Définition 19.4 (Forme $n$ -linéaire alternée)

On suppose que  $E$  est de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . On dit que  $f$  est alternée si elle s'annule lorsque deux de ses arguments sont égaux, c'à-d :

- Pour tout  $n$ -uplet de vecteurs  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ , pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$(i \neq j \text{ et } u_i = u_j) \implies f(u_1, \dots, u_n) = 0$$

#### Proposition 19.5

Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Si  $(u_1, \dots, u_n)$  est une famille *liée* de vecteurs de  $E$ , alors

$$f(u_1, \dots, u_n) = 0$$

*Démonstration.* Supposons par exemple que  $u_n$  s'écrive comme une combinaison linéaire de  $u_1, \dots, u_{n-1}$  :

$$u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i \quad \text{avec } \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K}$$

Alors,

$$\begin{aligned} f(u_1, \dots, u_n) &= f\left(u_1, \dots, u_{n-1}, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i f(u_1, \dots, u_{n-1}, u_i) \quad \text{par linéarité} \end{aligned}$$

et tous les termes de la somme ci-dessus sont nuls car  $f$  est alternée (par exemple le terme pour  $i = 1$  est  $\alpha_1 f(\boxed{u_1}, \dots, u_{n-1}, \boxed{u_1}) = 0$ , etc.).  $\square$

#### Définition 19.6 (Forme $n$ -linéaire antisymétrique)

On suppose que  $E$  est de dimension  $n \in \mathbb{N}^*$ . Soit  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$ . On dit que  $f$  est antisymétrique si, lorsqu'on échange la position de deux des ses arguments, le résultat est multiplié par  $-1$ , c'à-d :

- Pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ , pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i < j$ , on a

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = -f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

#### Proposition 19.7

Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire sur  $E$  antisymétrique, et soit  $\sigma \in S_n$ . Alors pour tout  $(u_1, \dots, u_n) \in E^n$ , on a

$$f(u_{\sigma(1)}, \dots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \dots, u_n)$$

*Démonstration.* Si  $\tau \in S_n$  est une transposition, alors on voit facilement que

$$f(u_{\tau(1)}, \dots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, \dots, u_n)$$

Le résultat voulu s'obtient en décomposant  $\sigma$  comme un produit de transpositions : si  $\sigma = \tau_1 \dots \tau_r$  alors

$$\begin{aligned} f(u_{\tau_1 \dots \tau_r(1)}, \dots, u_{\tau_1 \dots \tau_r(n)}) &= -f(u_{\tau_2 \dots \tau_r(1)}, \dots, u_{\tau_2 \dots \tau_r(n)}) \\ &= f(u_{\tau_3 \dots \tau_r(1)}, \dots, u_{\tau_3 \dots \tau_r(n)}) \\ &= (-1)^r f(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

par récurrence immédiate. Or, comme  $\sigma$  est le produit de  $r$  transpositions, on a  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$ . D'où le résultat.  $\square$

**Proposition 19.8**

Toute forme  $n$ -linéaire alternée est antisymétrique.

*Démonstration.*

$\square$

**Remarque.** On peut montrer que réciproquement toute forme  $n$ -linéaire antisymétrique est alternée, mais ce résultat ne figure pas au programme.

**1.4 Expression d'une forme  $n$ -linéaire alternée**

On suppose que  $E$  est de dimension  $n$ . Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ .

Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$  dont on pose leur coordonnées selon la base  $\mathcal{B}$  :

$$u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

Calculons  $f(u_1, \dots, u_n)$  en fonction des coordonnées  $a_{ij}$  :

$$f(u_1, \dots, u_n) = f\left(\sum_{i=1}^n a_{i1}e_i, \sum_{i=1}^n a_{i2}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in}e_i\right)$$

On peut ensuite développer chaque somme par linéarité comme on l'a fait pour une application bilinéaire. On se retrouverait alors avec  $n^n$  termes :

$$\underbrace{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}f(e_1, \dots, e_1)}_{\text{on prend l'indice } i=1 \text{ dans chaque composante}} + \underbrace{a_{11}a_{12}\cdots a_{1n-1}a_{2n}f(e_1, \dots, e_1, e_2)}_{\text{on prend l'indice } i=1 \text{ sauf pour la dernière composante où on prend } i=2} + \dots$$

Cependant, comme  $f$  est alternée, les termes ci-dessus s'annulent dès qu'un même indice  $i$  est pris plusieurs fois. On ne conserve donc que  $n!$  termes qui correspondent à un choix d'une **permutation** des indices  $i$  :

$$f(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})$$

Or, comme  $f$  est antisymétrique (puisque'elle est alternée), on a par la Proposition 19.7

$$f(u_1, \dots, u_n) = \left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right) f(e_1, \dots, e_n)$$

On en déduit en particulier que la donnée de  $f(e_1, \dots, e_n)$  suffit à totalement déterminer l'application  $f$ . Ainsi, on a obtenu la première assertion du résultat suivant :

**Corollaire 19.9**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée  $f : E^n \rightarrow \mathbb{K}$  telle que  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

De plus, toute autre forme  $n$ -linéaire alternée  $\varphi$  sur  $E$  est proportionnelle à  $f$  :

$$\exists \lambda \in \mathbb{K} \quad \varphi = \lambda f$$

*Démonstration.* La première assertion découle de ce qui précède. Pour la seconde, on a

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = \underbrace{\left( \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \right)}_{=f(u_1, \dots, u_n)} \varphi(e_1, \dots, e_n)$$

En posant  $\lambda := \varphi(e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{K}$ , on a bien  $\varphi(u_1, \dots, u_n) = \lambda f(u_1, \dots, u_n)$ , donc  $\varphi = \lambda f$  par arbitraire sur  $u_1, \dots, u_n$ . □

**Remarque.** On note parfois  $\Lambda_n^*(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ . On peut montrer que c'est un s.e.v. de  $\mathcal{L}(E)$ . Le Corollaire 19.9 dit en substance que  $\Lambda_n^*(E)$  est de dimension 1, ayant pour base la famille à un seul élément  $(f)$  :

- La deuxième assertion montre que la famille  $(f)$  est génératrice de  $\Lambda_n^*(E)$ .
- La première assertion montre que  $f \neq 0$ , donc la famille  $(f)$  est libre.

## 2 Déterminant d'une famille de vecteurs

### Hypothèse

Pour le reste du chapitre,  $E$  est un espace de dimension **finie**.

### 2.1 Définition

Étant donné une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$ , on va donner un nom particulier à l'unique forme  $n$ -linéaire alternée  $f$  du Corollaire ci-dessus.

#### Définition 19.10 (Déterminant d'une famille de vecteurs)

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle déterminant dans la base  $\mathcal{B}$  l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \rightarrow \mathbb{K}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

où les scalaires  $(a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  sont les coordonnées définies par

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i \quad \text{avec } a_{ij} \in \mathbb{K}$$

#### Proposition 19.11

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

- $\det_{\mathcal{B}}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ .
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ , ou encore  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .

#### Proposition 19.12

Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}'}$  est proportionnelle à  $\det_{\mathcal{B}}$ . Plus précisément :

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

*Démonstration.*  $\det_{\mathcal{B}'}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$ . Par le Corollaire 19.9, il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ . En évaluant en  $\mathcal{B}$ , on obtient alors

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1}$$

d'où le résultat. □

**Corollaire 19.13**

Soit  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$$

*Démonstration.* L'égalité de la Proposition 19.12 étant vraie pour tout  $n$ -uplet  $(u_1, \dots, u_n)$  de  $E^n$ , on peut en particulier prendre  $(u_1, \dots, u_n) = \mathcal{B}'$  : on a donc

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$$

d'où le résultat car  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = 1$ . □

**2.2 Exemples en base canonique**

**Notation.** On se place sur  $E = \mathbb{K}^n$  et on considère  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $E$ . Soit  $u_1, \dots, u_n \in E$  définis par leurs coordonnées (dans la base  $\mathcal{B}_c$ ) :

$$u_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad u_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Alors on peut noter

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} := \det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$$

**Cas  $n = 1$ .** Si  $E = \mathbb{K}$ , on a  $S_1 = \{\text{id}\}$ , donc

$$\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon(\text{id}) a_{\text{id}(1)1} = a_{11}$$

**Cas  $n = 2$ .** Si  $E = \mathbb{K}^2$ , on a  $S_2 = \{\text{id}, \tau\}$  avec  $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(\text{id}) a_{\text{id}(1)1} a_{\text{id}(2)2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)1} a_{\tau(2)2}$$

Donc

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}$$

Cette formule est à savoir par cœur !

**Exemple 6.**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$



**Cas  $n = 3$ .** On peut donner une formule pour le cas  $n = 3$ , mais il est beaucoup plus efficace de retenir la méthode de calcul sur des exemples. Il s'agit de la règle de Sarrus :

**Exemple 7.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

**Remarque.** La règle de Sarrus ne se généralise pas à  $n \geq 4$ .

### 3 Déterminant d'une matrice carrée

#### 3.1 Définition et propriétés sur les colonnes

##### Définition 19.14

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On définit le déterminant de  $A$ , noté  $\det A$ , par :

$$\det A := \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

##### Théorème 19.15

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont on note  $C_1, \dots, C_n$  les colonnes :

$$A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Alors en notant  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \dots, C_n)$$

Autrement dit

Le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée appliquée aux colonnes de  $A$

**Corollaire 19.16**

Avec les notations ci-dessus :

1. Si les colonnes  $C_1, \dots, C_n$  de  $A$  forment une famille liée, alors  $\det A = 0$ .
2. Le déterminant de  $A$  est inchangé lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \quad \det A = \det_{\mathcal{B}_c} \left( C_1, C_2, \dots, C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i \right)$$

3. Si on échange deux colonnes, le déterminant de  $A$  change de signe.
4. Plus généralement, une permutation des colonnes selon  $\sigma \in S_n$  multiplie le déterminant par  $\varepsilon(\sigma)$  :

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_c}(C_{\sigma(1)}, \dots, C_{\sigma(n)}) &= \varepsilon(\sigma) \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, \dots, C_n) \\ &= \varepsilon(\sigma) \det A \end{aligned}$$

*Démonstration.* Étant donné que le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée, la première assertion découle de la Proposition 19.5.

La seconde assertion se démontre à partir de la première :

$$\begin{aligned} &\det_{\mathcal{B}_c} \left( C_1, C_2, \dots, C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i \right) \\ &= \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \dots, C_n) + \det_{\mathcal{B}_c} \left( C_1, C_2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i \right) \quad \text{par linéarité} \\ &= \det A + 0 \end{aligned}$$

Le second déterminant étant nul car la famille  $\left( C_1, C_2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i \right)$  est liée.

Comme  $\det_{\mathcal{B}_c}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée, elle est antisymétrique. La définition d'une forme antisymétrique conduit à la troisième assertion, tandis que la Proposition 19.7 démontre la quatrième assertion.  $\square$

Les propriétés énoncées ci-dessus ont de *nombreuses* conséquences et applications.

**Exemple 8.**

•

$$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ \vdots & * & \vdots \\ 1 & & 2 \end{vmatrix} =$$

•

$$\begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$

•

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & a_{12} & \\ \vdots & \vdots & * \\ \lambda a_{n1} & a_{n2} & \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \\ \vdots & \vdots & * \\ a_{n1} & a_{n2} & \end{vmatrix}$$

•

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 22 & 33 \\ 111 & 222 & 333 \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 22 & 11 & 33 \\ 222 & 111 & 333 \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 33 & 11 & 22 \\ 333 & 111 & 222 \end{vmatrix}$$

### 3.2 Propriétés sur les lignes

#### Proposition 19.17

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors  $\det A^\top = \det A$ .

#### Corollaire 19.18

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont on note  $L_1, \dots, L_n$  les lignes. Alors en notant  $\mathcal{B}_c$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ ,

$$\det A = \det A^\top = \det_{\mathcal{B}_c} \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ L_1 & L_2 & \dots & L_n \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} = \det_{\mathcal{B}_c}(L_1, L_2, \dots, L_n)$$

En particulier,

Le déterminant est une forme  $n$ -linéaire alternée appliquée aux lignes de  $A$

#### Corollaire 19.19

Le résultat du Corollaire 19.16 est encore vrai si on remplace le mot “colonne(s)” par “ligne(s)”.

#### Exemple 9.

•

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

•

$$\begin{vmatrix} * \\ 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} =$$

•

$$\begin{vmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \mu b_1 & \mu b_2 \end{vmatrix} = \dots \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

•

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+d & e+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & e \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix}$$

## 4 Calcul pratique du déterminant

### 4.1 Opérations élémentaires

On peut effectuer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes pour calculer un déterminant, comme pour le calcul du rang. Cependant, contrairement au rang, la valeur du déterminant est modifiée quand on effectue une permutation ou une dilatation.

**Proposition 19.20 (Opérations élémentaires)**

Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  avec  $i \neq j$ .

1. Transvection : une opération  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  ou  $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ , ne change pas le déterminant.
2. Permutation : une opération  $L_i \leftrightarrow L_j$  ou  $C_i \leftrightarrow C_j$  change le signe du déterminant.
3. "Dilatation" : on peut "factoriser" par  $\lambda$  dans toute une colonne ou dans toute une ligne :

$$\begin{vmatrix} & & * & & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} & \\ & & * & & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & & * & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} & \\ & & * & & \end{vmatrix}$$

*Démonstration.* Tout découle du Corollaire 19.16 pour les colonnes, et du Corollaire 19.19 pour les lignes.

1. Une transvection revient à ajouter à une colonne (ou une ligne) une combinaison linéaire des autres. L'assertion 2 du Corollaire entraîne alors que le déterminant est inchangé.
2. L'assertion pour la permutation est une conséquence directe de l'assertion 3 du Corollaire.
3. Enfin, la dilatation est une conséquence du fait que le déterminant est une forme  $n$ -linéaire en les colonnes (et les lignes).

□

**Exemple 10.** Calculer  $D = \begin{vmatrix} & & -1 & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 2 & & & \end{vmatrix}$  (les termes non écrits sont nuls)

**Exemple 11.** Soit  $A \in A_{2n+1}(\mathbb{R})$  une matrice antisymétrique de taille  $2n + 1$ . Montrer que  $\det A = 0$ .

**Remarque.** Rappelons que si les lignes (ou les colonnes) forment une famille liée, alors le déterminant est nul. En particulier,

- Si deux lignes (ou deux colonnes) sont identiques, alors le déterminant est nul.
- Si une ligne (ou colonne) ne contient que des zéros, alors le déterminant est nul.
- Si une ligne (resp. une colonne) est une combinaison linéaire des autres lignes (resp. des autres colonnes), alors le déterminant est nul.

Enfin, on peut rappeler l’assertion 4 du Corollaire 19.16 (et son équivalent pour les lignes), qui sert plus rarement.

**Exemple 12.**

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & * \\ -1 & 2 & * \\ -1 & 2 & * \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car ...}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{car ...}$$

Les exemples 8 et 9 fournissent d’autres applications de ces propriétés.

## 4.2 Développement selon une ligne / colonne, cas simple

Ces méthodes permettent de réduire la taille d’un déterminant, à savoir passer d’un déterminant de taille  $n$  à une somme de déterminants de taille  $n - 1$ . On suppose donc dans cette partie que  $n \geq 2$ .

### Proposition 19.21

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  telle que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Alors  $\det A = \lambda \det A'$ .

*Démonstration.* On permute  $L_1 \leftrightarrow L_n$  puis  $C_1 \leftrightarrow C_n$  :

$$\det A = - \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \\ \lambda & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & & A' & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda \end{vmatrix}$$

Appelons  $a_{ij}$  les coefficients de la matrice du déterminant de droite (en particulier  $a_{nn} = \lambda$ ). On a ainsi

$$\det A = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

Si  $\sigma \in \mathcal{S}_n$  est telle que  $\sigma(n) \neq n$ , alors  $a_{\sigma(n)n} = 0$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n-1)n-1} a_{nn} \\ &= \lambda \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n-1)n-1} \end{aligned}$$

On affirme que

$$\det A = \lambda \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n-1)n-1}$$

En effet, si  $\sigma \in S_n$  vérifie  $\sigma(n) = n$ , alors la permutation  $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket}$  réalise une bijection de  $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$  dans lui-même, i.e.  $\sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket} \in S_{n-1}$ . Réciproquement, si  $\sigma' \in S_{n-1}$ , alors on peut prolonger  $\sigma'$  en une permutation de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  en posant  $\sigma'(n) = n$ . Enfin, on peut vérifier que la signature est inchangée lors de la restriction / du prolongement. D'où l'affirmation ci-dessus. Puisque

$$\det A' = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)1} \cdots a_{\sigma'(n-1)n-1}$$

on obtient le résultat attendu. □

Comme  $\det A^\top = \det A$ , le même résultat s'applique en passant à la transposée :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} \implies \det A = \lambda \det A'$$

Si  $\lambda = 0$ , on obtient  $\det A = 0$  : c'est cohérent avec ce qu'on a déjà vu car la première ligne (ou la première colonne) ne contient que des zéros.

**Proposition 19.22 (Déterminant d'une matrice triangulaire)**

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est une matrice triangulaire, alors

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

*Démonstration.* On fait la preuve pour le cas  $A$  triangulaire supérieure. Alors

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & & * \\ & a_{22} & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & & a_{nn} \end{vmatrix}$$

En développant selon la première colonne, on a

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & * \\ & \ddots \\ \mathbf{0} & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Le déterminant restant est celui d'une matrice triangulaire de taille  $n - 1$ . Par récurrence immédiate, on arrive à

$$\det A = a_{11} a_{22} \cdots a_{n-1n-1} \det(a_{nn}) = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

□

**Remarque.** Ce résultat est en particulier vrai si  $A$  est diagonale :  $\det A$  est alors le produit des coefficients diagonaux.

**Méthode (Calcul d'un déterminant de grande taille)**

La méthode générale de calcul d'un déterminant consiste à :

1. Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes pour faire apparaître un maximum de zéros sur une même ligne ou une même colonne.
  2. Développer le déterminant selon cette ligne ou cette colonne pleine de zéros pour abaisser la taille des déterminants à calculer.
  3. Les déterminants de taille 2 ou 3 peuvent alors être calculés directement (par exemple avec la règle de Sarrus).
- On peut aussi faire des opérations élémentaires pour se ramener à une forme triangulaire ou diagonale et conclure directement.

**Exemple 13.** Calculer  $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ .

### 4.3 Développement selon une ligne / colonne, cas général

#### Définition 19.23 (Mineur, cofacteur)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . On note

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ a_{ij} & \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{ligne } i \\ \\ \text{col. } j \end{array}$$

avec  $A_1, \dots, A_4$  des sous-matrices rectangulaires. On appelle mineur d'indice  $(i, j)$  le déterminant obtenu en enlevant la ligne  $i$  et la colonne  $j$  de  $A$ . On le note

$$\Delta_{ij} := \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

On appelle cofacteur d'indice  $(i, j)$  la quantité  $(-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ .

#### Proposition 19.24 (Développement selon une ligne ou une colonne)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- On fixe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors on peut développer le déterminant de  $A$  selon la ligne  $i$  :

$$\det A = \sum_{j=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

- On fixe  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors on peut développer le déterminant de  $A$  selon la colonne  $j$  :

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

Ainsi, pour développer selon la ligne  $i$ , on parcourt tous les coefficients de la ligne  $i$  de  $A$  et on multiplie chaque coefficient par le cofacteur de même indice, puis on somme le tout.

**Exemple 14.** Soit  $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ . Écrire sous forme factorisée  $D = \begin{vmatrix} d & 1 & d \\ a & b & c \\ 1 & d & 1 \end{vmatrix}$ . En déduire une CNS sur  $a, b, c, d$

pour avoir  $D = 0$ .





## 5 Déterminant d'un endomorphisme

### 5.1 Définition

On rappelle que si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une famille de  $E$  et si  $f \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $f(\mathcal{B})$  est la famille définie par

$$f(\mathcal{B}) := (f(e_1), \dots, f(e_n))$$

**Proposition 19.25**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,

$$\forall (u_1, \dots, u_n) \in E^n \quad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

De plus, le scalaire  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$  ne dépend pas de la base  $\mathcal{B}$  choisie, on le note

$$\det f := \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

et on l'appelle déterminant de  $f$ .

**Exemple 16.** Calculons  $\det \text{id}_E$  :

$$\det \text{id}_E = \det_{\mathcal{B}}(\text{id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

## 5.2 Propriétés algébriques du déterminant

### Proposition 19.26

On suppose  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $f, g \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$
- $f$  est inversible si et seulement si  $\det f \neq 0$  et dans ce cas

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

**Remarque.** L'application  $\det$  est ainsi un morphisme de groupes de  $(GL(E), \circ)$  dans  $(\mathbb{K}^*, \times)$ .

*Démonstration.*

- Montrons la première assertion. Par définition, si on pose  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{aligned} \det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}[(\lambda f)(\mathcal{B})] \\ &= \det_{\mathcal{B}}[\lambda f(e_1), \lambda f(e_2), \dots, \lambda f(e_n)] \\ &= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}[f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)] && \text{par linéarité} \\ &= \lambda^n \det f \end{aligned}$$

- Montrons la seconde assertion.

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det_{\mathcal{B}}[(f \circ g)(\mathcal{B})] \\ &= \det_{\mathcal{B}}[f(g(\mathcal{B}))] \end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant la Proposition 19.25 à la famille  $(u_1, \dots, u_n) = g(\mathcal{B})$ , on en déduit

$$\begin{aligned} \det(f \circ g) &= \det f \times \det_{\mathcal{B}}(g(\mathcal{B})) \\ &= \det f \times \det g \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) \\ &= \det f \times \det g \end{aligned}$$

D'où la seconde assertion.

- Montrons la troisième assertion. Si  $f$  est inversible, alors

$$1 = \det \text{id}_E = \det(f \circ f^{-1}) = \det f \times \det f^{-1}$$

Ainsi,  $\det f \times \det f^{-1} = 1$ . Donc  $\det f \neq 0$  et  $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$ . Réciproquement, si  $\det f \neq 0$ , alors pour une base  $\mathcal{B}$  quelconque de  $E$ ,

$$\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \neq 0$$

Comme  $\det_{\mathcal{B}}$  est une forme  $n$ -linéaire alternée, si la famille  $f(\mathcal{B})$  était liée, on aurait  $\det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) = 0$ , ce qui est contradictoire. Donc la famille  $f(\mathcal{B})$  est libre. Comme elle est de même cardinal que la dimension de  $E$ , c'est une base de  $E$ . Ainsi, l'image d'une base  $\mathcal{B}$  par  $f$  est encore une base. Cela entraîne que  $f$  est un isomorphisme, donc est inversible. D'où l'équivalence. □

**Proposition 19.27**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Alors pour toute base  $\mathcal{B}$  de  $E$ ,

$$\det f = \det (\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f))$$

*Démonstration.* Par définition, si on pose  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$

$$\begin{aligned} \det f &= \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B})) \\ &= \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n)) \\ &= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

où  $a_{ij}$  est la coordonnée du vecteur  $f(e_j)$  selon le vecteur  $e_i$ . Ainsi,  $a_{ij}$  est précisément le coefficient d'indice  $(i, j)$  de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ . Donc

$$\det f = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

□

**5.3 Version matricielle des propriétés précédentes**

**Proposition 19.28**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ .

- $\det I_n = 1$
- $\det (\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det (AB) = \det A \det B$
- $A$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ . Si tel est le cas, alors

$$\det (A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

En général,  $\det (A + B) \neq \det A + \det B$ .

*Démonstration.* Ces propriétés sont vérifiées pour des endomorphismes (Proposition 19.26) et on les déduit pour des matrices par la Proposition 19.27. Montrons par exemple la première assertion. Soit  $\mathcal{B}$  une base quelconque de  $\mathbb{K}^n$ . On sait que  $I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{K}^n})$ . D'où

$$\det I_n = \det \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_{\mathbb{K}^n}) = \det \text{id}_{\mathbb{K}^n} = 1$$

Les autres assertions se déduisent de la même manière.

□

**Remarque.** Bien que  $AB \neq BA$  en général, on a tout de même  $\det (AB) = \det (BA)$  :

$$\det (AB) = \det A \det B \quad \underbrace{=} \quad \det B \det A = \det (BA)$$

× est commutative dans  $\mathbb{K}$

Il en va de même pour les endomorphismes :  $\det (f \circ g) = \det (g \circ f)$ .

**Exemple 17.** Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{K})$ . Montrer que  $\det(P^{-1}AP) = \det A$ .

**Exemple 18.** Montrons par un contre-exemple que  $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ . On pose  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det A + \det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

## 6 Applications du déterminant

### 6.1 Déterminer si une famille est une base

#### Proposition 19.29

On suppose  $E$  de dimension  $n$ . Soit  $(u_1, \dots, u_n)$  une famille de  $n$  vecteurs de  $E$ . Soit  $\mathcal{B}$  une base quelconque de  $E$ . On pose

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$$

Alors  $(u_1, \dots, u_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si  $\det A \neq 0$ .

On notera que  $\det A = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ .

Dans  $\mathbb{K}^n$ , en notant  $\mathcal{B}_c$  la base canonique, on peut vérifier directement si  $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \dots, u_n)$  est nul ou non : cela revient à calculer le déterminant de la matrice où les vecteurs  $u_1, \dots, u_n$  sont écrits en colonne.

**Exemple 19.** Déterminer si la famille  $\mathcal{F} = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

## 6.2 Déterminer si une matrice $A$ est inversible, et formule de $A^{-1}$

Rappel :  $A$  est inversible si et seulement si  $\det A \neq 0$ .

### Définition 19.30 (Comatrice)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle comatrice de  $A$  la matrice notée  $\text{Com}(A)$ , telle que son coefficient d'indice  $(i, j)$  soit le cofacteur de  $A$  d'indice  $(i, j)$ , c'à d

$$[\text{Com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$$

où  $\Delta_{ij}$  est le mineur de  $A$  d'indice  $(i, j)$ .

### Proposition 19.31

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$A \text{Com}(A)^\top = \text{Com}(A)^\top A = (\det A) I_n$$

En particulier, si  $\det A \neq 0$ , alors ( $A$  est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top$$

**Remarque.** Si  $A$  est inversible, on peut alors déterminer  $A^{-1}$  par la formule ci-dessus, toutefois elle est extrêmement lourde car elle nécessite de calculer tous les cofacteurs de  $A$ . Elle a donc principalement un intérêt théorique. Cependant, elle est également intéressante pour calculer  $A^{-1}$  si la matrice  $A$  est de taille 2.

**Exemple 20.** Soit  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ . Alors

$$\text{Com}(A)^\top =$$

De plus,  $A$  est inversible si et seulement si

$$\det A = ad - bc \neq 0$$

et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{Com}(A)^\top =$$

On pourrait utiliser cette méthode pour calculer  $A^{-1}$  pour des tailles plus élevées, mais même pour  $n = 3$ , l'effort de calcul est conséquent. Il est conseillé de passer par la matrice augmentée.