Programme de colles n°20

semaine du 18 au 22 mars

Notions vues en cours

Chapitre 23 : Relations de comparaison

- Fonction dominée / négligeable / équivalente à une autre fonction au voisinage d'un point (fini ou infini), notations $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ / $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ / $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ — *Note : les définitions s'appuient uniquement sur le quotient f/g et son caractère borné au voisinage de a / sa limite en a*
- Négligeabilité entraine domination, si $\dfrac{f}{g}$ admet une limite finie en a alors $f = \underset{a}{O}(g)$
- Propriétés de o et O : transitivité, combinaison linéaire, produit, multiplication par un scalaire dans o, O
- Composition à droite dans o, O, reformulation des croissances comparées
- Propriétés de $\underset{a}{\sim}$: c'est une relation d'équivalence, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, produit, quotient, puissance
- $f + g \underset{a}{\sim} g$ ssi $f = \underset{a}{o}(g)$, composition à droite dans un équivalent
- Équivalents classiques en 0, "transitivité" du signe et des limites par équivalent, théorème d'encadrement version "équivalents"
- Suite dominée / négligeable / équivalente à une autre suite, notations $u_n = O(v_n)$ / $u_n = o(v_n)$ / $u_n \sim v_n$
- Extension des résultats vus pour les fonctions, composition à droite dans un équivalent ($f \underset{a}{\sim} g$ et $u_n \to a$ entraine $f(u_n) \sim g(u_n)$)

Chapitre 24 : Développements limités

- Interprétation du $\underset{x\to a}{o}((x-a)^n)$ comme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, calcul pratique avec des o compte tenu de cette interprétation
- Développement limité à l'ordre n en a, notation $DL_n(a)$, on peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$
- Unicité du $DL_n(a)$, $DL_n(0)$ d'une fonction paire ou impaire, troncature d'un DL
- Équivalence entre $DL_0(a)$ et continuité (quitte à prolonger par continuité en a). Équivalence entre $DL_1(a)$ et dérivabilité (quitte à prolonger)
- Formule de Taylor-Young, formulaire des DL usuels (disponible en ligne)
- Opérations et DL : combinaison linéaire, produit, composition, quotient, intégration

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **21 à 23**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : 4 formules d'équivalents et/ou de DL choisies par l'examinateur. Pour les DL, on demandera les termes jusqu'à un ordre fixé (par exemple 5 ou 6... mais pas n) Chapitre 23, Corollaire 23.17 + formulaire en ligne
2. Parité d'un DL Chapitre 24, Théorème 24.4
3. Formule de Taylor-Young : énoncé uniquement, avec toutes les hypothèses.Chapitre 24, Théorème 24.8 + hypothèses sur I et f en début de chapitre

Exemples de questions libres :

Chapitre 21 :

- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Soit $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $AB \mid AC$, peut-on en déduire que $B \mid C$?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quelles sont les trois conditions que doit vérifier un polynôme D pour être le PGCD de A et de B ?
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quel est le lien entre AB et $(A \wedge B)(A \vee B)$?
- Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(10)}(\alpha) = 0$, que peut-on dire sur la multiplicité de α ? Est-ce qu'il y a d'autres caractérisations équivalentes de cela ?

Chapitre 22 :

- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit P le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par n points donnés. Donner le degré de P en fonction de n. Quel est le polynôme qui passe par les points $(-1, 0)$ et $(0, 1)$?
- Soit $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$?

Chapitre 23 :

- Donner la définition de "f est dominée par g au voisinage de a" ainsi que sa notation. Quelle est la condition sur g pour que ceci ait un sens ?
- Soit les assertions $P : f(x) \underset{x \to a}{=} O(g(x))$ et $Q : f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$. Est-ce que $P \implies Q$? Est-ce que $Q \implies P$? Justifier.
- Soit $a \in \mathbb{R}$. Donner un équivalent de $x^2 + ax$ lorsque x tend vers $+\infty$ et quand x tend vers 0, en distinguant bien chaque cas.
- Donner un équivalent de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1$ quand x tend vers 0.
- Soit f, g, u trois fonctions. On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. Donner une condition nécessaire sur u qui permet d'assurer que $f \circ u \underset{0}{\sim} g \circ u$.