TD 33 : Théorie de l'intégration

Calcul d'intégrales (piqûre de rappel)

Exercice 1 (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 t^2(t^3+1)^5 dt$

2) $\displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{dt}{1-4e^{-2t}}$

3) $\displaystyle\int_2^5 \frac{dt}{t^2-t}$

4) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln t) dt$

5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sin t+\tan t}$

6) $\displaystyle\int_1^8 \frac{dt}{2\sqrt[3]{t}-1}$

7) $\displaystyle\int_1^2 \frac{t+1}{t^2-t-6} dt$

8) $\displaystyle\int_{-2}^2 t\,|t|\,dt$

9) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t}{(t^2+t+1)(t^2-t+1)} dt$

Exercice 2. Calculer $\quad I=\displaystyle\int_0^1 te^{i2\pi t}dt \quad$ et $\quad J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{e^{it}+1}dt$

Propriétés de l'intégrale

Exercice 3. Pour chacune de ces fonctions, donner l'ensemble de définition, de dérivabilité puis calculer la dérivée :

$$f : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{e^t}{t^2+1}dt \qquad g : x \mapsto \int_2^{2x} \frac{1}{\ln t}\,dt \qquad h : x \mapsto \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \arctan(t^2)\,dt$$

Exercice 4. Déterminer les limites suivantes :

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \qquad 2)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \frac{n\sin x}{x+n}dx \qquad 3)\quad \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \sqrt{1+x^n}dx$$

Exercice 5. Soit $f\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| = \int_a^b |f(t)|\,dt \quad\Longleftrightarrow\quad f\geq 0 \quad \text{ou} \quad f\leq 0$$

Exercice 6. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continue telle que $f\leq 1$ et $\displaystyle\int_0^1 f = 1$. Montrer que $f\equiv 1$.

Exercice 7 (**Lemme de Riemann-Lebesgue**)**.** Soit une fonction $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

1) On suppose f de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(nt) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2) Montrer que le résultat est encore vrai si f est en escalier sur $[a,b]$.
3) En déduire que le résultat est encore vrai si f est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exercice 8 ($\star$)**.** Soit $f\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$ une fonction telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt=\frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe.

Formules de Taylor

Exercice 9. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} \qquad \left|\sin x - \left(x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}\right)\right| \leq \dfrac{|x|^7}{7!}$

Exercice 10. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos t}{t} dt$$

1) Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ (on pourra intégrer par parties avant de majorer l'intégrale).
2) Montrer que f possède une limite finie en 0 que l'on déterminera. On pourra étudier le comportement quand x tend vers 0 de

$$\int_x^{2x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

Exercice 11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\left|e^x - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \leq \dfrac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$

En déduire, pour tout réel x, la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée d'ordre $n+1$ de $f : x \mapsto \ln(1+x)$.

En déduire, avec une formule de Taylor, la limite de la suite de terme général $u_n = 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Sommes de Riemann

Exercice 13. Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2 + k^2}$

2) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k(n-k)}$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2kn}}$

4) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} \left(\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{4} + \cdots + \sqrt[n]{2^n}\right)$

Exercice 14. En faisant apparaitre une somme de Riemann, déterminer un équivalent pour les suites suivantes :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \qquad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^3}$$

Continuité uniforme

Exercice 15. Est-ce que l'application $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $[0, 1]$? Et sur $[1, +\infty[$? En déduire si f est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$.

Même questions pour $g : x \mapsto \ln x$ sur $]0, 1]$, puis $[1, +\infty[$ et enfin $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 16. Soit $f : [0, 1[\to \mathbb{R}$ une application uniformément continue. Montrer que f est bornée. Le résultat est-il encore vrai si f est seulement supposée continue ?