TD 32 : Déterminants

Exercice 1. Montrer que l'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ définie par $f(A,B) = \mathrm{Tr}\,(A)\mathrm{Tr}\,(B) - \mathrm{Tr}\,(AB)$ est une forme bilinéaire.

Calcul de déterminants

Exercice 2. Calculer les déterminants suivants (avec $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ sauf pour le dernier où $a,b,c \in \mathbb{R}$) :

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 28 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & a & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad 5)\ \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{vmatrix}$$

$$2)\ \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1+a & a & a \\ b & 1+b & b \\ c & c & 1+c \end{vmatrix} \qquad 6)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \cos a & \cos b & \cos c \\ \sin a & \sin b & \sin c \end{vmatrix}$$

Exercice 3. Calculer les déterminants suivants (avec $a \in \mathbb{C}$) :

$$1)\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \qquad 2)\ \begin{vmatrix} 1 & i & -1 & -i \\ i & 1 & i & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & i & 1 \end{vmatrix} \qquad 3)\ \begin{vmatrix} a & 2 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 2 & a \end{vmatrix} \qquad 4)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a & a & a \\ 1 & a & a^2 & a^2 & a^2 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^3 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \end{vmatrix}$$

Exercice 4 (Déterminants de taille n)**.** Calculer les déterminants de taille n suivants

$$d_n = \begin{vmatrix} & & \mathbf{0} & & 1 \\ 1 & 1 & & & 1 \\ 1 & & \ddots & & 1 \\ 1 & & & 1 & 1 \\ 1 & & \mathbf{0} & & 1 \end{vmatrix} \qquad D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 2 & 3 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & 3 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b & b \\ b & a & b & & & b \\ b & b & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ b & & & b & a & b \\ b & b & \cdots & b & b & a \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{R} \qquad \delta_n = \begin{vmatrix} 1 & b & & & \mathbf{0} \\ a & 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & b \\ \mathbf{0} & & & a & 1 \end{vmatrix} \quad \text{avec } a,b \in \mathbb{R}$$

Exercice 5 ($\star$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Calculer le déterminant de Vandermonde :

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

On pourra commencer par les calculer pour $n = 2$ et $n = 3$, en cherchant une forme factorisée.

Applications des déterminants

Exercice 6. En calculant un déterminant, vérifier si les familles suivantes sont des bases de E.

1) $E = \mathbb{C}^3$, $u_1 = (1+i, 1, i)$, $u_2 = (i, -1, 1-i)$, $u_3 = (2-i, 0, -i)$.
2) $E = \mathbb{R}^2$, $u_1 = (\lambda+3, 3\lambda+1)$, $u_2 = (2\lambda+3, 5\lambda+4)$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
3) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = 4X^2+3X-1$, $P_2 = 2X^2-2X+3$, $P_3 = 3X^2+2X-4$.
4) $E = \mathbb{R}_2[X]$, $P_1 = X^2$, $P_2 = X(X-1)$, $P_3 = (X-1)^2$.

Exercice 7. Soit $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(P) = P - \alpha X P'$$

1) Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Déterminer pour quelles valeurs de α l'application φ n'est pas bijective.

Exercice 8. Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et soit $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$ définie par $f(M) = AM$.

1) Rappeler quelle est la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On la notera $\mathcal{B}_c$.
2) Calculer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$.
3) Montrer que $\det f = (\det A)^2$. En déduire une CNS pour que f soit bijective.

Exercice 9 (Identité de Lagrange)**.** Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. On souhaite montrer l'identité suivante :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

Démontrer cette identité en calculant $\begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & -d \\ d & c \end{vmatrix}$ de deux façons.

Exercice 10. Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ avec a, b, c distincts. Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z = 1 \\ ax+by+cz = d \\ a^2x+b^2y+c^2z = d^2 \end{cases}$$

Comatrice

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\det(\mathrm{Com} A) = (\det A)^{n-1}$.

Exercice 12. 1) Montrer que $\mathrm{Com}(I_n) = I_n$.

2) Montrer que pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles, on a $\mathrm{Com}(AB) = \mathrm{Com}(A)\mathrm{Com}(B)$