# TD 31 : Permutations

**Exercice 1.** Soit $n \geq 2$. Décomposer les permutations suivantes en produit de cycles à supports disjoints et en déduire leur signature :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

**Exercice 2.** Décomposer en produit de cycles à supports disjoints les permutations $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\sigma' = \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$.

**Exercice 3.** On se place dans $S_4$ et on pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

1) Décomposer $\sigma^2$ en produit de cycles à supports disjoints. On remarquera que $\sigma^2$ n'est pas un cycle. On dit que $\sigma^2$ est une <u>double transposition</u>.
2) Combien y a-t-il d'éléments (distincts) dans $S_4$ ? Donner-les tous.

**Exercice 4** (Ordre d'une permutation)**.** Soit $\sigma \in S_n$. On définit <u>l'ordre de $\sigma$</u> comme étant le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$ (on admet qu'un tel $k$ existe toujours).

1) On pose $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \in S_5$. Déterminer l'ordre de $\sigma$.
2) Quel est l'ordre d'une transposition ? D'un 3-cycle ?
3) Quel est l'ordre d'un $p$-cycle ?
4) Quel est l'ordre de $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ ?
5) Soit $p, q$ des entiers premiers entre eux supérieurs ou égaux à 2. Soit $c_p$ et $c_q$ deux cycles de longueurs respectives $p$ et $q$, à supports disjoints. On pose $\sigma = c_p c_q$ Montrer que

$$\forall m \in \mathbb{N}^* \qquad \sigma^m = \mathrm{id} \iff pq \mid m$$

En déduire l'ordre de $\sigma$.

**Exercice 5.** Dans $S_n$ ($n \geq 2$), est-ce qu'il existe une permutation $\sigma$ telle que $\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ ?

**Exercice 6** ($\star$)**.** Dans $S_n$, soit $c = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un $p$-cycle et $\sigma \in S_n$. Montrer que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1}$ est un $p$-cycle que l'on précisera càd on déterminera $b_1, \cdots, b_p \in [\![1, n]\!]$ tels que $\sigma \circ c \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_p \end{pmatrix}$.

**Exercice 7** ($\star$)**.** Soit $\sigma \in S_{10}$ d'ordre 14.

Donner un exemple d'une telle permutation. Montrer que $\sigma$ est nécessairement impaire, puis déterminer le nombre de permutations d'ordre 14 de $S_{10}$.