TD 30 : Matrices et applications linéaires

Matrices de vecteurs et d'applications

Exercice 1. Soit $\mathcal{B} = ((1,2,-2), (-4,1,3), (0,5,-3))$ une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer la matrice du vecteur $x = (8,3,-3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 2 (*De morphisme à matrice*)**.** Déterminer les matrices dans les bases canoniques des morphismes suivants :

1) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par $\qquad f(x,y,z) = (-x+2z, 3x-4y, -5x+6z, -7y+8z)$
2) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = 2P - XP'$
3) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(M) = AM$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
4) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = Q(X+2) - Q(X)$ avec Q une primitive de P.

Exercice 3 (*De matrice à morphisme*)**.** On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer les expressions des morphismes f et g canoniquement associés à A et B. Déterminer, lorsque cela a un sens, les matrices dans les bases canoniques de $f+g$, de $f \circ g$, de $g \circ f$, de f^{-1}, de g^{-1}, de $(f \circ g)^{-1}$ et de $(g \circ f)^{-1}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par $\qquad f(P) = 2P - P' + 2P(1)$.

1) Déterminer la matrice de f dans les bases canoniques (de départ et d'arrivée).
2) Montrer que f est un isomorphisme, et déterminer la matrice associée à f^{-1} dans les bases canoniques.
3) Soit $a,b,c \in \mathbb{R}$. En déduire l'expression de $f^{-1}(aX^2 + bX + c)$.
4) Avec la même méthode, déterminer l'expression des applications réciproques des morphismes suivants :
   (a) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}^3$ définie par $\qquad f(P) = (P(1), P(2), P(3))$
   (b) $\Phi : E \to E$ définie par $\qquad \Phi(f) = f' - f,\quad$ avec $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$

Exercice 5 (*Endomorphismes nilpotents*)**.** On notera 0 l'application nulle de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $u^3 = 0$ et $u^2 \neq 0$, où l'on note $u^k := \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$.

1) Justifier l'existence de $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^2(a) \neq 0_E$.
2) Démontrer que $\mathcal{B} = (a, u(a), u^2(a))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$, qu'on notera A.
4) Déterminer le commutant de A, i.e. l'ensemble des matrices M telles que $AM = MA$.
5) Soit $F = \left\{ v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \mid v \circ u = u \circ v \right\}$. Déduire de la question précédente que $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{id}, u, u^2)$, où l'on note id l'application identité de $\mathbb{R}^3$.

Changements de base(s)

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (3x - y, -2x + 7y)$.

1) Écrire la matrice A canoniquement associée à f.
2) Soit $u = (1,-1)$ et $v = (2,3)$. Montrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
3) Déterminer la matrice de f dans la base (u,v).

Exercice 7. Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1) Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}_c$ et la matrice de passage Q de $\mathcal{B}_c$ vers $\mathcal{B}$.
2) On note $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f(x,y,z) = (2x + 2y + z, -2x - y, x + y - z)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique, puis dans la base $\mathcal{B}$. En déduire $f \circ f \circ f$.

Exercice 8. Soit $M = \begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}$, soit (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application dont la matrice dans la base (e_1, e_2, e_3) est M. Montrer que les vecteurs

$$e_1' = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \qquad e_2' = 3e_1 + 4e_2 + e_3 \qquad e_3' = e_1 + 2e_2 + 2e_3$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$ et calculer la matrice de f dans cette base.

Exercice 9. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G, avec

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0 \right\} \qquad G = \mathrm{Vect}((1,1,1))$$

1) Déterminer une base $\mathcal{B}$ adaptée à F et G.
2) Donner la matrice de p dans la base $\mathcal{B}$. En déduire une expression de $p(x,y,z)$.

Exercice 10. On pose $S = \begin{pmatrix} -5 & -6 & -6 \\ 6 & 7 & 6 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ et s l'endormorphisme canoniquement associé à S.

1) Montrer que s est une symétrie.
2) Déterminer ses éléments caractéristiques.
3) En déduire une base $\mathcal{B}$ pour laquelle la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s)$ est simple et donner cette matrice.

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'application linéaire canoniquement associée à A.

1) Pour un réel λ quelconque, calculer $\mathrm{Ker}\,(A - \lambda I_3)$.
2) En déduire les valeurs λ pour lesquelles f n'est pas bijective.
3) Donner une base de $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda I_3)$ pour les valeurs de λ obtenues à la questions précédente.
4) En déduire une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Noyau, image, rang, matrices équivalentes

Exercice 12. Déterminer le rang, le noyau et l'image des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 8\\ 2 & 4\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Montrer que $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{K})=\operatorname{Ker} D\oplus \operatorname{Im} D$.

Exercice 13. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et $M_{\alpha,\beta}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & \alpha & \beta\\ 2 & -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$.
Déterminer les réels α et β telles que l'application linéaire canoniquement associée à $M_{\alpha,\beta}$ soit surjective.

Exercice 14. Soit $A\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r. Montrer que A s'écrit comme la somme de r matrices de rang 1.

Exercice 15. Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang $n-1$. Montrer que A n'est pas inversible, puis que A est équivalente à une matrice nilpotente, i.e. à une matrice N pour laquelle il existe $k\in\mathbb{N}^*$ tel que N^k soit la matrice nulle.

Trace et matrices semblables

Exercice 16. Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices semblables. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{N}$, A^k est semblable à B^k.

Exercice 17. Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1) Montrer que si A,B sont semblables, alors pour tout $\lambda\in\mathbb{K}$ les matrices $A-\lambda I_n$ et $B-\lambda I_n$ sont aussi semblables.
2) Est-ce que les matrices suivantes sont semblables ?

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 18. En utilisant la trace, montrer qu'il n'existe pas deux matrices $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $AB-BA=I_n$.

Exercice 19. Soit $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1) On suppose que $\operatorname{Tr}(AA^\top)=0$. Montrer que $A=0$.
2) On suppose que pour toute matrice $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{Tr}(AM)=\operatorname{Tr}(BM)$. Déduire de la question précédente que $A=B$.