TD 28-29 : Corrigé

Applications linéaires

Exercice 1.

Exercice 2.

Image, noyau, rang (dimension finie)

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Image, noyau (dimension quelconque)

Exercice 9.

Exercice 10.

Exercice 11.

Exercice 12.

Projecteurs, symétries, etc.

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16.

Formes linéaires

Exercice 17. 1) Fait en cours.

2) On cherche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $p = \alpha f + \beta g$. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On cherche donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que

$$p(x,y) = \alpha f(x,y) + \beta g(x,y)$$

ou encore $x = \alpha(x+y) + \beta(x-y)$. On constate que $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ convient. Ainsi, $p = \boxed{\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g}$.
On trouve de même que $q = \boxed{\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}g}$.

3) On cherche $u, v \in E$ tels que

$$\begin{cases} f(u) = 1 \\ f(v) = 0 \\ g(u) = 0 \\ g(v) = 1 \end{cases}$$

(f joue le rôle de e_1^*, g celui de e_2^*, u celui de e_1 et v celui de e_2). On pose $u = (x_u, y_u)$. Dans ce cas

$$\begin{cases} f(u) = 1 \\ g(u) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

donc $x = y = \frac{1}{2}$, ainsi, $u = \boxed{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)}$. On trouve de manière similaire que $v = \boxed{\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)}$

Exercice 18.

Exercice 19. 1) On vérifiera facilement que φ_k est linéaire (à vous de le faire). De plus, l'ensemble d'arrivée de φ_k est $\mathbb{R}$. Donc $\varphi_k \in E^*$.

2) On sait que $\dim E^* = \dim E = n+1$, donc il suffit de montrer que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est libre. Soit $\alpha_0, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$. On suppose que $\alpha_0\varphi_0 + \ldots + \alpha_n\varphi_n = 0_{E^*}$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\alpha_0 P(0) + \alpha_1 P(1) + \ldots + \alpha_n P(n) = 0$$

En particulier, avec $P = (X-1)(X-2)\cdots(X-n) \in \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que $\alpha_0 P(0) + 0 + \ldots + 0 = 0$. Or, $P(0) \neq 0$, si bien que $\boxed{\alpha_0 = 0}$. On a ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\alpha_1 P(1) + \ldots + \alpha_n P(n) = 0$$

En particulier, avec $P = (X-2)\cdots(X-n) \in \mathbb{R}_n[X]$, on en déduit que $\alpha_1 P(1) = 0$, et comme 1 n'est pas racine de P, on a $\boxed{\alpha_1 = 0}$. Sur le même principe, on montre successivement que $\boxed{\alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0}$. Donc $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est libre et donc une base de E^*.

3) On note $\psi : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(P) = \int_0^n P(t)dt$. On vérifie aisément que $\psi \in E^*$ (à vous de jouer), et donc par la question précédente, on peut poser $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les coordonnées de ψ selon la base $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$, si bien que

$$\psi = \lambda_0\varphi_0 + \ldots + \lambda_n\varphi_n$$

et donc pour tout polynôme P, on a

$$\psi(P) = \lambda_0\varphi_0(P) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(P)$$

et donc $\int_0^n P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \ldots + \lambda_n P(n)$