TD 28-29 : Applications linéaires

Applications linéaires

Exercice 1. Les applications suivantes suivantes sont-elles linéaires ?

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y) = (x+y,\, x-2y,\, 0)$
2) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (2x+y,\, y+1)$
3) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (xy, yx)$
4) $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $f(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
5) $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = a+d$
6) $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 4f$
7) $\varphi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = 2ff'$
8) $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P^{(k)}(X)$

9 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $f(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ ($\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ sont vus comme des $\mathbb{C}$-e.v.)

10 $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ définie par $f(z_1, z_2) = z_1 - \overline{z_2}$ ($\mathbb{C}^2$ et $\mathbb{C}$ sont vus comme des $\mathbb{R}$-e.v.)

Exercice 2. Soit $(e_1, e_2, e_3) = ((1,4,1),\, (-2,3,3),\, (0,2,1))$. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ une application linéaire qui vérifie

$$f(e_1) = (4,-1,4) \qquad f(e_2) = (3,2,1) \qquad f(e_3) = (1,-5,5)$$

1) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ sans utiliser d'argument de dimension.
2) Justifier l'existence et l'unicité de l'application f.
3) Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. En utilisant la question 1), déterminer $f(x,y,z)$.

Image, noyau, rang (dimension finie)

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+y+z,\, 3x-5y+z)$$

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x,y) = (x,\, x+y,\, x+2y)$$

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
2) Déterminer $\operatorname{Im} f$, ainsi qu'une base et sa dimension.
3) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $f(P) = P - P' - P''$.

1) Montrer que f est bijective.
2) Dans cette question on suppose $n \geq 2$. Calculer $f(1)$, $f(X)$ et $f(X^2)$. En déduire les polynômes $Q_0, Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que $f(Q_0) = 1$, $f(Q_1) = X$ et $f(Q_2) = X^2$.

Exercice 6. On pose $E = \mathscr{C}(\mathbb{R})$ et $f_1, f_2, f_3, f_4 \in E$ les fonctions définies par :

$$f_1(t) = \sin t \qquad f_2(t) = \cos t \qquad f_3(t) = t \sin t \qquad f_4(t) = t \cos t$$

Enfin on définit $F = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3, f_4)$.

1) Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ est une base de F. En déduire la dimension de F.
2) On considère l'application $D : F \to F$ définie par $D(f) = f'$. Montrer que D est bien définie et que c'est un endomorphisme de F.
3) Déterminer $\mathrm{Ker}\, D$ et $\mathrm{Im}\, D$. Que peut-on en déduire sur D ?

Exercice 7. Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ de degrés respectifs $n, m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $P \wedge Q = 1$. On veut montrer qu'il existe un unique couple $(U, V) \in \mathbb{R}[X]^2$ vérifiant :

$$PU + QV = 1 \qquad \deg U \leq m - 1 \qquad \deg V \leq n - 1$$

1) Justifier brièvement l'existence du couple (U, V) sans les contraintes sur les degrés de U et de V.

On définit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_{m-1}[X] \times \mathbb{R}_{n-1}[X] &\to \mathbb{R}_{m+n-1}[X] \\ (U, V) &\mapsto PU + QV \end{aligned}$$

2) Justifier que φ est bien définie et linéaire.
3) Montrer que φ est injective.
4) En déduire que φ est bijective. Conclure.

Exercice 8. Soit E un e.v. de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.

1) Montrer que $\mathrm{Im}\,(u + v) \subset \mathrm{Im}\, u + \mathrm{Im}\, v$. En déduire que $\mathrm{rg}\,(u + v) \leq \mathrm{rg}\, u + \mathrm{rg}\, v$
2) Trouver $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que l'inégalité ci-dessus soit stricte.
3) Trouver $u, v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tels que l'inégalité ci-dessus soit une égalité.

Image, noyau (dimension quelconque)

Exercice 9. On considère l'application $f : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ définie par $f(P) = P - P'$.

1) Déterminer $\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.
2) f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 10. On définit $\varphi : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ par $\varphi(u) = (u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que φ est linéaire et déterminer $\mathrm{Ker}\, \varphi$ et $\mathrm{Im}\, \varphi$. Est-ce que φ est injective ? surjective ?

Exercice 11. Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$-e.v. puis $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

1) Montrer que $g \circ f = 0$ si et seulement si $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, g$.
2) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f \subset \mathrm{Ker}\,(g \circ f)$ et que $\mathrm{Im}\,(g \circ f) \subset \mathrm{Im}\, g$.
3) En déduire que si $g \circ f$ est un isomorphisme, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 12. Soit E un e.v. et $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer les assertions suivantes :

$$\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \qquad \operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2 \iff \operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$$
$$\operatorname{Im} f^2 \subset \operatorname{Im} f \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2 \iff \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f = E$$

Projecteurs, symétries, etc.

Exercice 13. Déterminer si les applications linéaires suivantes sont des projecteurs ou des symétries, et déterminer leurs éléments caractéristiques :

1) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (x, -2x-y)$
2) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = (x+y-z, x+y-z, x+y-z)$
3) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(x-z, 2y, -x+z)$
4) $f_A : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = R$, où R est le reste de la division euclidienne de P par $A \in \mathbb{R}[X]$ fixé.

Exercice 14. Déterminer l'expression :

1) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ sur $F = \operatorname{Vect}((0,1))$ parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((1,1))$.
2) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ par rapport à F et parallèlement à G (définis ci-dessus).
3) De la symétrie $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ par rapport à $F = \operatorname{Vect}((1,2,3))$ et parallèlement à $G = \operatorname{Vect}((1,0,0),(1,1,0))$.
4) Du projecteur $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ sur G et parallèlement à F (définis ci-dessus).

Exercice 15. Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ et $q = \operatorname{id}_E - p$.

1) Montrer que p est un projecteur si et seulement si q est un projecteur.
2) On suppose que p est un projecteur. Montrer que $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker} q$ et que $\operatorname{Ker} p = \operatorname{Im} q$.

Exercice 16. Soit p, q deux projecteurs de E. Montrer que

$$\operatorname{Ker} p = \operatorname{Ker} q \iff (p \circ q = p \quad \text{et} \quad q \circ p = q)$$
$$\operatorname{Im} p = \operatorname{Im} q \iff (p \circ q = q \quad \text{et} \quad q \circ p = p)$$

Formes linéaires

Exercice 17. On pose $E := \mathbb{R}^2$ et $f, g \in E^*$ les applications

$$f(x,y) = x+y \qquad g(x,y) = x-y$$

1) Montrer que (f,g) forme une base de E^*.
2) Déterminer les coordonnées de $p : (x,y) \mapsto x$ et de $q : (x,y) \mapsto y$ selon la base (f,g).
3) Trouver une base (u,v) de E telle que (f,g) soit la base duale de (u,v).

Exercice 18. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $f \in E^*$. Montrer que f est surjective ou identiquement nulle.

Exercice 19. On considère l'ensemble $E = \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$ on pose $\varphi_k : E \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_k(P) = P(k)$.

1) Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\varphi_k \in E^*$.
2) Montrer que $(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ est une base de E^*.
3) En déduire qu'il existe $\lambda_0, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \qquad \int_0^n P(t)dt = \lambda_0 P(0) + \lambda_1 P(1) + \ldots + \lambda_n P(n)$$

Remarque : on peut montrer le même résultat si on remplace l'intégrale ci-dessus par $\displaystyle\int_a^b P(t)dt$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Cependant, les $\lambda_0, \cdots, \lambda_n$ dépendront de a, b.