TD 27 : Dimension des espaces vectoriels

Famille libre, génératrice, bases en dimension finie

Exercice 1.

1) Est-ce que $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 66 \\ 65 \\ -55 \\ 729 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ e^{-6} \\ \ln 5 \\ \tan(e) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2^{\mathrm{ch} 2} \\ \arcsin 1 \\ \arctan 3 \\ \mathrm{th}(\pi)^{-\frac{1}{\pi}} \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$?
2) Montrer que la famille $\mathcal{F} = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3) Est-ce que $\mathcal{F} = \left(X^3 - X^2, X^2 - X, X - 1\right)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_3\left[X\right]$?

Exercice 2 (*Archi-classique*)**.** Soit $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{K}\left[X\right]$ des polynômes tels que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{K}_n\left[X\right]$.

Exercice 3. On pose $\mathcal{F} = ((1,-1,-1),(3,3,1),(2,4,2))$ et $G = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est liée. Que peut-on en déduire sur la dimension de G ?
2) Déterminer la dimension de G puis donner trois bases différentes de G.

Dimension, supplémentaires

Exercice 4. On définit le s.e.v. suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0 \quad \text{et} \quad 2x - y = 0\right\}$$

1) Déterminer la dimension de F.
2) Trouver un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 5y + z = 0\right\} \qquad G = \mathrm{Vect}\left((0,1,-1)\right)$$

1) Déterminer une base de F et une base de G.
2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 6. On considère les s.e.v. suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$F = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + 4z = 0 \end{cases} \right\} \qquad G = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right)$$

1) Déterminer une base de F et une base de G.
2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

Exercice 7. Soit F, G deux s.e.v. de $\mathbb{R}^5$ de dimension 3. Montrer que F et G ne sont pas en somme directe.

Exercice 8. On considère la famille de 3 vecteurs

$$u = (1, 1, -1) \qquad v = (1, -1, 1) \qquad w = (-1, 1, 1)$$

1) Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer les coordonnées du vecteur $(2, 1, 3)$ selon la base $\mathcal{B}$.

Exercice 9. On définit les s.e.v. suivants

$$F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\right\} \qquad G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 3y = 0\right\}$$

1) Déterminer la dimension de F ainsi qu'une base de F.
2) Même question pour G.
3) Même question pour $F \cap G$.
4) Même question pour $F + G$.

Exercice 10. Soit E un e.v. de dimension $n \geq 1$. Soit G et H deux s.e.v. de dimension $n-1$ distincts.

1) Quelles sont les valeurs possibles de $\dim(G+H)$?
2) En déduire $G+H$, puis la dimension de $G \cap H$.

Exercice 11. On pose

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & x-y \\ x+y & 2y \end{pmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

Montrer que E est un e.v. et déterminer la dimension de E.

Exercice 12 (Dimensions de $D_n(\mathbb{K})$ et $T_n^+(\mathbb{K})$)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1) Rappeler quelle est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2) Déterminer une famille génératrice de $D_n(\mathbb{K})$ construite à partir de matrices de la question 1.
3) En déduire une base de $D_n(\mathbb{K})$, puis sa dimension.
4) Reprendre les questions 2 et 3 pour $T_n^+(\mathbb{K})$, ensemble des matrices triangulaires supérieures.

Exercice 13 (Dimensions de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$)**.** On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices (de taille n) symétriques et antisymétriques respectivement. Déterminer les dimensions de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 14 ($\star$)**.** Montrer que la dimension de l'e.v. $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est infinie.

Exercice 15 ($\star$)**.** Soit E un e.v. de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F et G deux s.e.v. de même dimension $p < n$.

1) On suppose que $p = n-1$. Montrer que F et G ont un supplémentaire commun, i.e. qu'il existe un s.e.v. H de E tel que $F \oplus H = G \oplus H = E$.
2) En déduire le résultat pour p quelconque par récurrence descendante sur p.