TD 26 : Espaces vectoriels

Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils des espaces vectoriels ?

1) $E_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 3y = 0\right\}$
2) $E_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\right\}$
3) $E_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\right\}$
4) $E_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\right\}$
5) $E_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\right\}$
6) $E_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\right\}$
7) $E_7 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 6y + 3z = 0\right\}$
8) $E_8 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z \in \mathbb{Q}\right\}$
9) $E_9 = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est convergente}\right\}$
10) $E_{10} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ est bornée}\right\}$
11) $E_{11} = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1\right\}$
12) $E_{12} = GL_n(\mathbb{K})$
13) $E_{13} = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A_{11} = 0\}$
14) $E_{14} = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \,\middle|\, \prod\limits_{i=1}^{n} A_{ii} = 0\right\}$
15) $E_{15} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(2) = 0\right\}$
16) $E_{16} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f(0) = 2\right\}$
17) $E_{17} = \left\{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid f'(0) = f(0)\right\}$
18) $E_{18} = \left\{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$
19) $E_{19} = \left\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid f \text{ est monotone}\right\}$
20) $E_{20} = \left\{P \in \mathbb{K}\left[X\right] \mid \deg P = 1\right\}$

Exercice 2. Soit A l'ensemble des suites réelles arithmétiques. Est-ce que A est un e.v. ?
Soit G l'ensemble des suites réelles géométriques. Est-ce que G est un e.v. ?

Exercice 3. L'ensemble $i\mathbb{R}$ est-il un $\mathbb{R}$-e.v. ? et un $\mathbb{C}$-e.v. ?

Exercice 4 ($\star$)**.** Soit F, G deux s.e.v. d'un $\mathbb{K}$-e.v. E. Montrer que $F \cup G$ est un s.e.v. si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Familles libres, génératrices, bases

Exercice 5. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ sont-elles libres ou liées ?

1) $\mathcal{F}_1 = \big((1,1,0),\, (0,1,1)\big)$
2) $\mathcal{F}_2 = \big((1,-1,0),\, (0,1,-1),\, (1,0,-1)\big)$
3) $\mathcal{F}_3 = \big((1,2,1),\, (2,1,-1),\, (1,-1,-2)\big)$
4) $\mathcal{F}_4 = \big((1,1,-1),\, (1,-1,1),\, (-1,1,1),\, (1,1,1)\big)$
5) $\mathcal{F}_a = \big((1,1,a),\, (1,a,1),\, (a,1,1)\big)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 6. Parmi les familles de l'exercice précédent, lesquelles sont génératrices de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 7. Les familles suivantes de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles libres ou liées ?

$\mathcal{F}_1 = (\mathrm{id}, \cos, \sin)$

$\mathcal{F}_2 = \left(\mathrm{id}, \quad x \mapsto e^x, \quad x \mapsto e^{2x}\right)$

$\mathcal{F}_3 = (x \mapsto x + 2, \quad x \mapsto 3x + 4, \quad x \mapsto 5x + 6)$

$\mathcal{F}_4 = \left(1_{\left[a,+\infty\right[}\right)_{a \in \mathbb{R}}$

Exercice 8. On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-e.v. Montrer que la famille $(1, \sqrt{2})$ est libre, puis que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre. *On pourra utiliser sans démonstration que $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$ si $n \in \mathbb{N}$ n'est pas le carré d'un entier.*

Exercice 9. Trouver une famille génératrice des s.e.v. suivants :

1) $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\}$
2) $G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = 0\}$
3) $H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = y - z = 0\}$
4) $V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z = 4t\}$

Exercice 10 (*Archi-classique*)**.** Soit $P_0, \cdots, P_n \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes tels que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\deg P_k = k$. Montrer que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille libre.

Exercice 11 ($\star$)**.**

1) Montrer que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{kx})_{k \in \mathbb{N}}$ est libre.
2) Montrer que la famille de fonctions $(x \mapsto e^{ax})_{a \in \mathbb{R}}$ est libre.

Somme de s.e.v.

Exercice 12. On considère les ensembles $A = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $B = \{(0,y,z) \mid y,z \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que A et B sont des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2) Écrire les vecteurs $u = (1,2,1)$ et $v = (2,3,-1)$ sous la forme $a + b$ avec $a \in A$ et $b \in B$.

Exercice 13. Dans $\mathbb{R}[X]$, on considère

$$E_1 = \operatorname{Vect}\left(X^2+1, X^4-1\right) \qquad E_2 = \operatorname{Vect}\left(X^2, X^4+X\right)$$

La somme $E_1 + E_2$ est-elle directe ?

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v.

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_1, u_2, \cdots, u_n, v \in E$. Montrer que $\operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_n) + \operatorname{Vect}(v) = \operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v)$.
2) Dans cette question, on suppose $E = \mathbb{R}^3$, $u = (1,-3,7)$, $v = (2,6,-4)$ et $w = (0,-2,3)$. Déterminer une famille génératrice de $F = \operatorname{Vect}(u,v) + \operatorname{Vect}(w)$. A-t-on $F = \mathbb{R}^3$?

Exercice 15. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Montrer que $F \cap G = F + G \iff F = G$.

Exercice 16. Montrer que $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}) = F \oplus G$, avec

$$F := \left\{f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad G := \{x \mapsto ax + b \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 17. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On considère $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires et $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires.

1) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des s.e.v. de E.
2) Montrer que $E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. *Indication* : pour une fonction f donnée, on pourra étudier $p : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$.

Exercice 18. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et

$$F = \mathbb{R}_1[X] \qquad G = \left\{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\right\}$$

1) Montrer que F et G sont des s.e.v. supplémentaires dans E. *Indication* : on pourra considérer une division euclidienne par $(X-1)^2$.
2) Déterminer la décomposition des polynômes $1, X, X^2$ et X^3 selon F et G.