TD 24-25 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison (fonctions)

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Relations de comparaison (suites)

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9 (*Composition à gauche par l'exponentielle*)**.**

Exercice 10 (*Composition à gauche par le logarithme*)**.**

Exercice 11 ($\star$)**.**

Calculs de développements limités

Exercice 12.

Exercice 13 (DL ailleurs qu'en 0)**.**

Exercice 14.

Exercice 15 ($\star$)**.**

Exercice 16 ($\star$)**.**

Applications des développements limités

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19 ($\star$)**.**

Exercice 20.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23.

Développements asymptotiques et cadre implicite

Exercice 24.

Exercice 25 (*DL d'une fonction réciproque*)**.**

1) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit et composée de telles fonctions. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} > 0$$

on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus f est dérivable donc continue. Par le théorème de la bijection monotone, f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$. De plus, un tableau de variations montre que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Enfin, comme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que f' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on en déduit que f^{-1} est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

2) f^{-1} étant de classe $\mathscr{C}^\infty$ par ce qui précède, on en déduit que f^{-1} est de classe $\mathscr{C}^5$, donc admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ par la formule de Taylor-Young. Pour montrer que le DL peut s'écrire sous la forme voulue, il suffit de montrer que f^{-1} est impaire (car alors tous les termes de degré pair du DL s'annuleront). Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Comme f est impaire, on a aussi $-y = -f(x) = f(-x)$. Ainsi :

$$f^{-1}(-y) = f^{-1}(f(-x)) = -x = -f^{-1}(y)$$

Par arbitraire sur y, la fonction f^{-1} est impaire.

3) On sait qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f^{-1}(y) = ay + by^3 + cy^5 + \underset{y \to 0}{o}(y^5)$$

Or, on remarque que $f(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$. Par composition à droite, on a donc :

$$f^{-1}(f(x)) = af(x) + bf(x)^3 + cf(x)^5 + \underset{x \to 0}{o}(f(x)^5)$$

D'une part, on sait que $f^{-1}(f(x)) = x$ et d'autre part on remarque que $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} x$ donc $f(x) = x + \underset{x \to 0}{o}(x)$, et donc $\underset{x \to 0}{o}(f(x)^5) = \underset{x \to 0}{o}(x^5)$. On en déduit que

$$x = axe^{x^2} + b(xe^{x^2})^3 + c(xe^{x^2})^5 + \underset{x \to 0}{o}(x^5)$$

Or,

$$\begin{aligned} xe^{x^2} &= x\left(1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\underset{x\to 0}{o}(x^4)\right) \\ &= x+x^3+\frac{1}{2}x^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5) \end{aligned}$$

On peut donc en conclure que :

$$\begin{aligned} x &= a\left(x+x^3+\frac{1}{2}x^5\right)+b\left(x+x^3+\frac{1}{2}x^5\right)^3+c\left(x+x^3+\frac{1}{2}x^5\right)^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5) \\ &= ax+x^3\left(a+b\right)+x^5\left(\frac{a}{2}+3b+c\right)+\underset{x\to 0}{o}(x^5) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$0=(a-1)x+(a+b)x^3+\left(\frac{a}{2}+3b+c\right)x^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$$

Or, la fonction nulle admet pour unique $\mathrm{DL}_5(0)$ le DL $0+0x+\ldots+0x^5+\underset{x\to 0}{o}(x^5)$. Par identification, on a donc

$$\begin{cases} a-1=0 \\ a+b=0 \\ \dfrac{a}{2}+3b+c=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Finalement

$$\boxed{f^{-1}(y)=y-y^3+\frac{5}{2}y^5+\underset{y\to 0}{o}(y^5)}$$

Exercice 26 (*DA d'une suite implicite*). 5 Par la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} u_n &= n-\ln(n+o(n)) \\ &= n-\ln\left(n\left(1+o(1)\right)\right) \\ &= n-\ln n-\ln\left(1+o(1)\right) \\ &= n-\ln n-o(1) \\ &= n-\ln n-o(\ln n) \end{aligned}$$

6

$$\begin{aligned} u_n &= n-\ln\left(n-\ln n+o(\ln n)\right) \\ &= n-\ln n-\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= n-\ln n+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right) \qquad \text{car } \frac{\ln n}{n}\to 0 \end{aligned}$$

7

$$\begin{aligned} u_n &= n-\ln\left(n-\ln n+\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) \\ &= n-\ln n-\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln n}{n^2}+o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \\ &= n-\ln n-\ln\left(1+X\right) \end{aligned}$$

avec $X = -\dfrac{\ln n}{n} + \dfrac{\ln n}{n^2} + o\left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right) \to 0$, donc par composition :

$$\begin{aligned}
u_n &= n - \ln n - \left(X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)\right) \\
&= n - \ln n - \left[-\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{\ln n}{n} + \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right)^2 + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)\right] \\
&= n - \ln n - \left[-\frac{\ln n}{n} + \underbrace{\frac{\ln n}{n^2}}_{=o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)} - \frac{1}{2} \times \frac{(\ln n)^2}{n^2} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)\right] \\
&= n - \ln n + \frac{\ln n}{n} - \frac{1}{2} \times \frac{(\ln n)^2}{n^2} + o\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 27 (*DL d'une fonction implicite*)**.**