TD 24-25 : Analyse asymptotique

Relations de comparaison (fonctions)

Exercice 1. À l'aide du symbole o, comparer les trois fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

$$f(x) = x^{(\ln x)^2} \qquad g(x) = (x^2)^{\ln x} \qquad h(x) = (\ln x)^{x \ln x}$$

Exercice 2. Déterminer un équivalent (simple) en $+\infty$ des expressions suivantes :

$$\text{A)} \quad \frac{x^2 - \ln x + 3^x}{x^3 + \sqrt[3]{x^8}} \qquad \text{B)} \quad \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} \qquad \text{C)} \quad \sqrt{1 + \frac{1}{\ln(x+1)}}$$

Exercice 3. Déterminer un équivalent (simple) en 0 des expressions suivantes :

$$\text{A)} \quad \frac{(1-e^x)\sin\sqrt{x}}{x^2 + x^3} \qquad \text{B)} \quad \frac{\sqrt{1+\sin x}}{\ln(1+\sin x)} \qquad \text{C)} \quad \frac{e^x - (1+x^2)^3}{\sqrt{1-\cos x}}$$

Exercice 4. En utilisant les équivalents, déterminer les limites suivantes :

$$1) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(3x)} \qquad 2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^x - 1} \qquad 3) \quad \lim_{x\to 0} (1+\tan x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Relations de comparaison (suites)

Exercice 5. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs.

1) On suppose qu'il existe $k \in \left[0, 1\right[$ tel qu'à partir d'un certain rang $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \leq k$. Montrer que (x_n) converge vers 0.
2) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Déduire de la question précédente que $a^n = o(n!)$, puis que $n! = o(n^n)$.

Exercice 6. Trouver un équivalent simple des suites de termes généraux suivants, puis en déduire les limites éventuellement demandées :

1) $u_n = \dfrac{n^2 + \sqrt{n^5}}{\ln(4n) + e^n}$
2) $u_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$
3) $u_n = \sqrt{\ln(n+1) - \ln n}$ puis $\lim n u_n$
4) $u_n = e^{\frac{1}{n}} - e^{\frac{1}{n+1}}$ puis $\lim n^3 u_n$
5) $u_n = \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$ puis $\lim n^2 u_n$
6) $u_n = \sqrt{4 + \dfrac{a}{n}} - 2$ où $a \in \mathbb{R}^*$

Exercice 7. Déterminer les limites des suites (u_n) suivantes :

$$u_n = n \times \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) \qquad v_n = \frac{1 - e^{-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1 - \cos(e^{-\frac{1}{n}})}} \qquad w_n = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n \qquad \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

Exercice 8. Soit (u_n) une suite réelle telle que $u_0 > 0$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n}$.

En considérant $v_n = \dfrac{1}{u_n}$, montrer que $u_n \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 9 (*Composition à gauche par l'exponentielle*)**.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \sim v_n$. Montrer que si $u_n - v_n \to 0$, alors $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

Exercice 10 (*Composition à gauche par le logarithme*)**.** Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes strictement positifs. On suppose $u_n \sim v_n$ et que (u_n) et (v_n) tendent vers une limite (nécessairement commune) $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1) On suppose $\ell \in \left]0,1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$. Montrer que $\ln u_n \sim \ln v_n$.
2) Montrer que $u_n = v_n + o(u_n)$.
3) En déduire que si $\ell = 0$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.
4) En utilisant la question précédente, montrer que si $\ell = +\infty$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

Note : finalement, si la limite (commune) de (u_n) *et* (v_n) *est différente de 1, alors* $\ln u_n \sim \ln v_n$.

5) Application : déterminer un équivalent de $u_n = \ln\left(\sin \frac{1}{n}\right)$.
6) Soit $u_n = 1 + e^{-n}$ et $v_n = 1 + e^{-2n}$. Montrer que $u_n \sim v_n$. A-t-on $\ln u_n \sim \ln v_n$?

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit (u_n) une suite réelle décroissante telle que $u_n + u_{n+1} \sim \frac{1}{n}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.
2) Montrer que (u_n) converge vers 0^+.
3) Donner un équivalent simple de (u_n).

Calculs de développements limités

Exercice 12. Déterminer les développements limités suivants :

(a) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\operatorname{sh} x$
(b) $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\operatorname{ch} x$
(c) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\sqrt[3]{1+x} + \dfrac{1}{1+x}$
(d) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{\sin x}{x}$
(e) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{e^x - \sqrt{1+2x}}{x^2}$
(f) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\cos(x)\ln(1+x)$
(g) $\mathrm{DL}_6(0)$ de $(1-\operatorname{ch}(x))\sin x$
(h) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $e^x \arctan x$
(i) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $e^{\sqrt{1+x}}$
(j) $\mathrm{DL}_8(0)$ de e^{x^2}
(k) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln(\cos x)$
(l) $\mathrm{DL}_8(0)$ de $\sqrt{1+x^2}\ln(1+x^3)$
(m) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{1}{1+x+x^2}$
(n) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\operatorname{th} x$
(o) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x\cos x}{\sin x}$
(p) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\dfrac{\arctan x}{\tan x}$
(q) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\arctan x$
(r) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\arccos x$
(s) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$
(t) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sqrt{2+x}$
(u) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $e^{\operatorname{ch} x}$
(v) $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln\left(1+\sqrt{1+x}\right)$
(w) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\operatorname{sh}(x-x^2)$
(x) $\mathrm{DL}_2(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
(y) $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\cos(x)^{\sin(x)}$
(z) $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\cos^5 x$

Exercice 13 (DL ailleurs qu'en 0)**.** En posant $y = x - 3$, déterminer les $\mathrm{DL}_3(3)$ de e^x, $\ln x$ et x^α avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
De manière similaire, déterminer le $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$ et le $\mathrm{DL}_3(\frac{\pi}{4})$ de $\tan x$.

Exercice 14. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de α, l'ordre maximal n pour lequel x^α admet un $\mathrm{DL}_n(0)$.

Exercice 15 ($\star$)**.** Montrer que $\dfrac{1}{1+|x|^3}$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. En est-il de même pour un $\mathrm{DL}_3(0)$? Un $\mathrm{DL}_4(0)$?

Exercice 16 ($\star$)**.** Déterminer le $\mathrm{DL}_{100}(0)$ de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{99}\frac{x^k}{k!}\right)$.

Applications des développements limités

Exercice 17. À l'aide d'un DL et/ou d'un équivalent, déterminer les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x\ln x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^2\left(e^{\frac{1}{x}}-e^{\frac{1}{x+1}}\right)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{\mathrm{sh}x}-\frac{e^{-x}}{\sin x}\right)$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{\ln(1+x)}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x^2-1}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\ln(x)\ln(1-x)$

8) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$

9) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$

Exercice 18. Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de la fonction arcsinus. En déduire les valeurs des dérivées $n^{\text{ièmes}}$ en 0 de la fonction arcsin.

Exercice 19 ($\star$)**.** Soit $n\geq 1$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1} & \text{si } x\neq 0\\ n+1 & \text{sinon}\end{cases}$

1) Calculer le $\mathrm{DL}_3(0)$ de f.
2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3$.

Exercice 20. Soit f la fonction définie pour tout $x\in\left]-1,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$ par

$$f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$$

1) Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de f.
2) En déduire que f peut être prolongée par continuité en 0. On notera encore ce prolongement f.
3) Montrer que f est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.
4) Déterminer la position relative de f par rapport à sa tangente en 0.

Exercice 21. Donner la tangente et la position par rapport à la tangente aux points x_0 des fonctions suivantes. Est-ce qu'il y a un extremum local en x_0 ?

1) $\displaystyle\frac{1}{1+e^x}+\frac{x}{4}$ en $x_0=0$

2) $\displaystyle\frac{2+x+2x^2}{1+x^2}$ en $x_0=0$

3) $\displaystyle\frac{\ln x}{x-1}+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ en $x_0=1$

4) $x+2\sqrt{x}-\sqrt{3+x}$ en $x_0=1$

Exercice 22. Donner une asymptote en $+\infty$ et la position par rapport à l'asymptote des fonctions suivantes :

$$f(x)=\sqrt{x(2+x)}e^{\frac{1}{x}}\qquad g(x)=\left(x^3+x^2+x+1\right)^{\frac{1}{3}}\qquad h(x)=\ln(e^{x^2}-e^x-1)\qquad \varphi(x)=\sqrt{\frac{x^4}{1+x^2}}$$

Exercice 23. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x^2+1}}{x-1}$.

1) Donner un équivalent simple de f en 0. En déduire le signe de f au voisinage de 0 et la pente de sa tangente.
2) Donner un équivalent simple de f en 1.
3) Montrer que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique et préciser leurs positions relatives.

Développements asymptotiques et cadre implicite

Exercice 24. Déterminer un développement asymptotique à 3 termes pour les expressions suivantes :

1) $\dfrac{1}{x+\ln x}$ en $+\infty$ 2) $\sqrt{x+\sqrt{x}}$ en $+\infty$ 3) $\ln(n+1)$ (en $+\infty$)

Exercice 25 (*DL d'une fonction réciproque*)**.** Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=xe^{x^2}$.

1) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et que sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^\infty$.
2) Justifier que f^{-1} admet un $\mathrm{DL}_5(0)$ et que ce DL peut s'écrire
$$f^{-1}(y)=ay+by^3+cy^5+\underset{y\to0}{o}(y^5)$$
3) En déduire une expression du $\mathrm{DL}_5(0)$ de $f^{-1}(f(x))$ en fonction de a,b,c. Conclure.

Exercice 26 (*DA d'une suite implicite*)**.** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on considère l'équation $x+\ln x=n$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+^*$.

1) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une unique solution qu'on notera u_n. On dispose donc d'une relation "fondamentale" :
$$\boxed{u_n=n-\ln u_n}$$
2) Montrer que (u_n) est croissante, puis montrer que $u_n\to+\infty$.
3) Montrer que $\ln u_n=o(u_n)$. En déduire que $u_n\sim n$.
4) Justifier que $u_n=n+o(n)$.
5) En déduire que $u_n=n-\ln n+o(\ln n)$. *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*
6) En déduire que $u_n=n-\ln n+\dfrac{\ln n}{n}+o\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$. *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*
7) En déduire un DA de u_n avec 4 termes. *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*

Exercice 27 (*DL d'une fonction implicite*)**.** Pour $\varepsilon>0$, on considère l'équation $e^{-\varepsilon x}=x$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}_+$.

1) Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une unique solution qu'on notera $x(\varepsilon)$. On dispose donc d'une relation "fondamentale" :
$$\boxed{x(\varepsilon)=e^{-\varepsilon x(\varepsilon)}}$$
2) Montrer que $x(\varepsilon)\leq1$, et en déduire que $\lim\limits_{\varepsilon\to0}x(\varepsilon)=1$.
3) Montrer que $x(\varepsilon)=1-\varepsilon+\underset{\varepsilon\to0}{o}(\varepsilon)$.
4) En déduire le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\varepsilon\mapsto x(\varepsilon)$ *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*
5) En déduire le $\mathrm{DL}_3(0)$ en 0 de $\varepsilon\mapsto x(\varepsilon)$ *Utiliser la question précédente et la relation fondamentale.*