TD 19 : Calcul matriciel

Produit de matrices

Exercice 1. Trouver tous les produits matriciels possibles parmi les matrices suivantes et les calculer.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad Z = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Soit $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer J^2. En déduire J^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (*Classique !*)**.** Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer N^k. En déduire A^k.
2) On considère les suites $(u_n), (v_n), (w_n)$ définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et la relation de récurrence, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 3v_n + w_n \\ w_{n+1} = 3w_n \end{cases}$$

   (a) On pose la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Donner une relation de récurrence entre U_{n+1} et U_n.

   (b) En déduire les valeurs de u_n, v_n, w_n.

Exercice 4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer la puissance k-ième des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Déterminer toutes les matrices qui <u>commutent</u> avec A, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ telles que $AM = MA$.

Exercice 6 ($\star$)**.** On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = A$. On procède par analyse-synthèse et on considère une solution X de cette équation.

1) Montrer que X commute avec A.
2) En déduire que certains coefficients de X sont nuls. Conclure.

Matrices et algèbre

Exercice 7. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^3+2A^2+3A+4I_n=0$. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 8. On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2-3A+2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 9. Soit $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $(A+I_3)^3$. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 10. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A^2=I_n$. On pose

$$E=\{pI_n+qA \mid p,q \in \mathbb{R}\}$$

Montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif.

Exercice 11. On pose $G=\left\{ \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

1) Montrer que $(G,\times)$ est un groupe.
2) Est-ce un sous-groupe de $GL_2(\mathbb{R})$?

Exercice 12 ($\star$)**.** *On définit le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par*

$$Z=\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \qquad AB=BA\}$$

Montrer que $A \in Z$ si et seulement si A est une matrice scalaire. Indication : on pourra considérer les matrices élémentaires.

Matrices (anti)symétriques

Exercice 13. Soit $A,B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $AB \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si A et B commutent.

Exercice 14. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On pose $B=A^\top A$.

1) Montrer que B est une matrice symétrique.
2) Montrer que les coefficients diagonaux de B sont positifs.
3) Montrer que si $B=0$, alors $A=0$.

Exercice 15. Montrer que pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, il existe un unique couple $(A,S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $M=A+S$. *Indication : raisonner par analyse-synthèse.*

Exercice 16. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $MM^\top M=I_n$.
Montrer que M est inversible. Puis montrer que M est symétrique.