TD 18 : Corrigé

Calcul dans un groupe

Exercice 1 (Calcul dans un groupe)**.**

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9 ($\star$)**.**

Morphismes de groupes

Exercice 10. Rappel : f_a est un morphisme si et seulement si $\forall x, y \in G \quad f_a(xy) = f_a(x)f_a(y)$

Soit $x, y \in G$.

$$\begin{aligned} & f_a(xy) = f_a(x)f_a(y) \\ \iff & axy = axay \\ \iff & xy = xay \\ \iff & x = xa \\ \iff & e = a \end{aligned}$$

Ainsi, si $a = e$, alors f_a est un morphisme de groupes. Si $a \neq e$, alors f_a n'est pas un morphisme (donc n'est pas un endomorphisme, ni un isomorphisme, ni un automorphisme).

Si $a = e$, alors f_a est aussi un endomorphisme, et par ailleurs pour tout $x \in G$, $f_e(x) = ex = x$ donc $f_e = \mathrm{id}_G$, et ainsi f_e est clairement un isomorphisme. C'est donc un automorphisme.

Soit $x, y \in G$.

$$\begin{aligned} & g_a(xy) = g_a(x)g_a(y) \\ \iff & axya^{-1} = axa^{-1}aya^{-1} \\ \iff & axya^{-1} = axya^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $a \in G$, g_a est un morphisme de groupes. C'est aussi un endomorphisme. Vérifions si g_a est bijective.

- Pour l'injectivité, il suffit de vérifier si $\mathrm{Ker} g_a = \{e\}$. Soit $x \in \mathrm{Ker} g_a$.

$$\begin{aligned} g_a(x) = e &\implies axa^{-1} = e \\ &\implies ax = ea = a \\ &\implies x = e \end{aligned}$$

  Ainsi, $x \in \{e\}$. On a donc $\mathrm{Ker} g_a \subset \{e\}$ et l'inclusion réciproque est évidente. Ainsi, g_a est injective.
- Pour la surjectivité, on peut vérifier la définition : montrons que $\forall y \in G \quad \exists x \in G \quad g_a(x) = y$. Soit $y \in G$. On pose $x = a^{-1}ya \in G$. Alors

$$g_a(x) = axa^{-1} = aa^{-1}yaa^{-1} = y$$

  Ainsi, g_a est surjective.

Finalement, g_a est un isomorphisme. On en déduit finalement que g_a est un automorphisme.

Note : on aurait aussi pu montrer que $g_a \circ g_{a^{-1}} = g_{a^{-1}} \circ g_a = \mathrm{id}_G$, donc que g_a est bijective.

Exercice 11.

Exercice 12.

Calcul dans un anneau

Exercice 13.

Exercice 14.

Exercice 15.

Exercice 16 (Entiers de Gauss)**.**

Exercice 17 ($\star$)**.**

Anneaux intègres, corps

Exercice 18. Preuve de la distributivité : soit $A, B, C \in \mathscr{P}(X)$.

$$\begin{aligned} (A \Delta B) \cap C &= [(A \setminus B) \cup (B \setminus A)] \cap C \\ &= [(A \setminus B) \cap C] \cup [(B \setminus A) \cap C] \\ &= [(A \cap C) \setminus B] \cup [(B \cap C) \setminus A] \end{aligned}$$

$$(A \cap C) \Delta (B \cap C) = [(A \cap C) \setminus (B \cap C)] \cap [(B \cap C) \setminus (A \cap C)]$$

Pour conclure, il suffit de montrer que :

$$\begin{cases} (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B \\ (B \cap C) \setminus (A \cap C) = (B \cap C) \setminus A \end{cases}$$

On a :

$$\begin{aligned}(A\cap C)\setminus(B\cap C) &= (A\cap C)\cap(B\cap C)^c\\ &= (A\cap C)\cap(B^c\cup C^c)\\ &= (A\cap C\cap B^c)\cup(A\cap C\cap C^c)\\ &= (A\cap C\cap B^c)\cup\varnothing\\ &= A\cap C\cap B^c\\ &= (A\cap C)\setminus B\end{aligned}$$

Et de même on montre que $(B\cap C)\setminus(A\cap C)=(B\cap C)\setminus A$. Ainsi, on a bien

$$(A\Delta B)\cap C=(A\cap C)\Delta(B\cap C)$$

Puis, comme $\cap$ est commutative, on a aussi $C\cap(A\Delta B)=(C\cap A)\Delta(C\cap B)$. Cela conclut la preuve de la distributivité.

Exercice 19.

Exercice 20.

1) Soit $x,x'\in A$. On suppose que $f_a(x)=f_a(x')$.

$$f_a(x)=f_a(x')\implies ax=ax'$$

Or, comme $a\neq 0_A$ et que A est intègre, on en déduit que a est régulier, donc que $x=x'$. Ainsi, f_a est injective.

2) Par définition, $f_a(A)\subset A$. Montrons que $f_a(A)$ possède autant d'éléments que A. Comme A est fini, on peut poser $n\in\mathbb{N}^*$ son nombre d'éléments (on a même $n\geq 2$ car $A\neq\{0_A\}$). Posons également $x_1,\cdots,x_n$ les éléments distincts de A. Alors

$$f_a(A)=\{ax_1,ax_2,\cdots,ax_n\}$$

De plus, les éléments $ax_1,\cdots,ax_n$ sont deux à deux distincts car f_a est injective. On en déduit que $f_a(A)$ possède n éléments, soit autant que A. Comme $f_a(A)\subset A$, on en déduit que $f_a(A)=A$

Puisque f_a est une application de A dans A et que $f_a(A)=A$, on en déduit que f_a est surjective. Ainsi, f_a est bijective.

3) Comme f_a est bijective, l'élément 1_A admet un antécédent par f_a. Donc il existe $x_0\in A$ tel que $f_a(x_0)=1_A$, ou encore $ax_0=1_A$. De plus, comme A est intègre, A est commutatif, ce qui entraine que $x_0a=1_A$ également. Ainsi, a est inversible (et $a^{-1}=x_0$).

4) On sait que A est un anneau intègre. De plus $A\neq\{0_A\}$. Enfin, par la question précédente, tout élément non nul de A est inversible. On en déduit que A est un corps.