TD 18 : Indications

Calcul dans un groupe

Exercice 1 (Calcul dans un groupe)**.** Il s'agit essentiellement d'appliquer scrupuleusement les opérations licites dans un groupe et uniquement celles-là.

Exercice 2. C'est une simple vérification. Pour rappel, $n\mathbb{Z} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 3. La loi en question est la loi $+$ (sous-entendu car cette loi fait de $\mathbb{Z}$ un groupe). Du fait que $1 \in H$ et que H est un sous-groupe de $\mathbb{Z}$, que peut-on en déduire ?

Exercice 4. 1) C'est une simple vérification.

2) Il faut et il suffit de vérifier si tout élément de $\mathbb{R}$ est symétrisable pour $*$.
3) Au vu de la question 2, on se doute que l'élément z à exclure est celui qui n'est pas symétrisable pour $*$. Il faut toutefois être très précis sur ce qu'il faut vérifier pour que $(\mathbb{R} \setminus \{z\}, *)$ soit un groupe. Vérifiez bien si chacune des propriétés G1 à G4 sont encore vérifiées si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R} \setminus \{z\}$. Pour deux d'entre elles, il faut des vérifications supplémentaires qui ne sont pas triviales.

Exercice 5. 1) Pour montrer l'unicité, se donner deux éléments absorbants a_1, a_2 et montrer que $a_1 = a_2$.

4 Utiliser les définitions d'élément absorbant pour e et pour a.

Exercice 6. 1) C'est un classique. Il faut utiliser la caractérisation des sous-groupes et le fait que $z \in H \cap K \iff z \in H$ et $z \in K$.

2) Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, raisonner par contraposée. Utiliser le fait que $H \not\subset K$ équivaut à dire qu'il existe un élément $u \in H \setminus K$.

Exercice 7. C'est une vérification, mais il faut bien exploiter la définition : pour tout $a \in G$, on a :

$$a \in Z(G) \iff \forall x \in G \quad ax = xa$$

Exercice 8. En déterminant des symétriques de t_a et $\sigma_{a,b}$ pour $\circ$, on montre en particulier que ces applications sont bijectives, donc que T et S sont bien inclus dans $\mathrm{Bij}(\mathbb{C})$.

Exercice 9 ($\star$)**.** Si on appelle m le minimum de $H \cap \mathbb{N}^*$, on peut vérifier (rigoureusement) que $H = m\mathbb{Z}$.

Morphismes de groupes

Exercice 10. Utiliser les définitions. Pour ce qui est de montrer si un morphisme φ est un isomorphisme, on peut ou bien exhiber une fonction ψ qui serait sa réciproque, ou bien vérifier que $\operatorname{Ker} \varphi = \{e\}$ et $\operatorname{Im} \varphi = G$.

Exercice 11. $\mathbb{R}_+^*$ est un groupe pour $\times$ et $\mathbb{R}$ est un groupe pour $+$. On peut donc munir E d'une structure de groupe à peu de frais...

Exercice 12. 1) Il faut vérifier si φ_n est un isomorphisme, donc si φ_n est bijective. On peut notamment vérifier son injectivité en déterminant $\operatorname{Ker} \varphi_n$.

2) Cela découle naturellement du cours et de la question 1.

Calcul dans un anneau

Exercice 13. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$. Il faut trouver $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(xy)^m = 0_A$...

2) Soit $m, n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^m = y^n = 0_A$. Il faut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $(x+y)^N = 0_A$... Une recherche au brouillon est conseillée !

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$. On pourra utiliser le fait que $1 = 1^n - x^n$.

Exercice 14. 1) C'est très long ! En effet, il faut vérifier A1–A3 puisqu'on ne connait pas de «sur-anneau» qui contienne $\operatorname{End}(G)$.

2) C'est très court ! Et aussi «très cours».

Exercice 15.

Exercice 16 (Entiers de Gauss)**.**

Exercice 17 ($\star$)**.** Il s'agit de montrer que pour tout $x \in A$, on a $x + x = 0_A$, ou encore $2x = 0_A$. Utiliser la propriété $\forall x \in A \quad x^2 = x$ pour y arriver.

Anneaux intègres, corps

Exercice 18. 1) Il faut utiliser la définition. La première expression de $A \Delta B$ suffit pour trouver l'élément neutre et le symétrique d'un ensemble $A \in \mathscr{P}(X)$. Pour la distributivité, il faut montrer que $(A\Delta B) \cap C = (A \Delta C) \cap (B \Delta C)$. On pourra s'aider d'un dessin de patates avec A, B, C, similaire à celui du TD sur les ensembles. Grâce à ce dessin, on peut dans un premier temps montrer que $(A\Delta B) \cap C = \Big((A \cap C) \setminus B\Big) \cup \Big(\dots\Big)$ (à vous de compléter et de faire la preuve).

Exercice 19. Il suffit de montrer que $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

Exercice 20. 1) Attention, f_a n'est pas un morphisme a priori. Il faut donc revenir à la définition de l'injectivité pour une application quelconque.

2) L'inclusion de $f_a(A)$ dans A est évidente. Il faut ensuite justifier que $f_a(A)$ et A ont le même nombre d'éléments pour conclure que $f_a(A) = A$ (c'est un résultat "évident" de dénombrement qu'on verra plus tard dans l'année.

3) Il faut utiliser le fait que f_a est bijective et la définition de l'inversibilité d'un élément.