TD 14-15 : Dérivation, convexité

Les grands théorèmes de la dérivation

Exercice 1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe $\alpha_x \in \left]x, x+1\right[$ tel que

$$(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}} = e^{1/\alpha_x}\left(1 - \frac{1}{\alpha_x}\right)$$

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - xe^{\frac{1}{x}}\right]$.

Exercice 2. Soit $f, g : \left[a, b\right] \to \mathbb{R}$ dérivables telles que $f(a) = g(a)$ et $f(b) = g(b)$. Montrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que $f'(c) = g'(c)$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable qui s'annule en n points (distincts). Montrer que f' s'annule en au moins $n-1$ points.

Exercice 4. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, majorer l'erreur commise dans les approximations suivantes :

$$\sqrt{101} \approx 10 \qquad \frac{1}{0,99^2} \approx 1 \qquad \cos 1 \approx \frac{1}{2}$$

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et admettant la même limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ et en $-\infty$. En considérant la fonction $g = f \circ \tan$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f'(c) = 0$.

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Soit enfin $a, b \in I$ tels que $a < b$. Pour tout $x \in I$, on pose

$$g(x) = \frac{f(a) + f(x)}{2} - \left(f\left(\frac{a+x}{2}\right) + (x-a)^2 A\right)$$

avec A une constante réelle.

1) Déterminer une valeur A telle que $g(a) = g(b) = 0$. Cette valeur de A sera fixée comme tel dans la suite.
2) Montrer qu'il existe $c \in \left]a, b\right[$ tel que $g'(c) = 0$.
3) En appliquant l'égalité des accroissements finis à f' entre deux points bien choisis, en déduire qu'il existe $d \in \left]a, b\right[$ tel que :

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} = f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{(b-a)^2}{8} f''(d)$$

Dérivabilité revisitée

Exercice 7. Étudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \qquad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 8. 1) Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sh}x}{x}$.

2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \text{ch}\sqrt{x}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

3) Est-ce que f est de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 9. Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \arccos\sqrt{1-x^2}$ est définie sur $\left[-1,1\right]$ puis étudier sa dérivabilité sur $\left[-1,1\right]$.

Exercice 10. Prolonger les fonctions suivantes par continuité en 0. Puis étudier leur dérivabilité en 0.

$$f(x) = x^x \qquad g(x) = x\ln|x| \qquad h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \qquad \varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{|x|}}$$

Exercice 11. Étudier la dérivabilité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$.

Dérivées n-ièmes

Exercice 12 (Dérivées n-ièmes)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les dérivées n-ièmes des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = (x^2-1)e^{3x} \qquad f_2(x) = \sin^3 x \qquad f_3(x) = \ln(2-3x) \qquad f_4(x) = \frac{1}{1-x^2}$$

Pour f_4, on pourra d'abord calculer les dérivées n-ièmes de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : x \mapsto x^{2n}$.

1) Calculer de deux façons la dérivée n-ième de f. On pourra utiliser le fait que $x^{2n} = x^n \times x^n$.

2) En déduire $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 14. Soit $f : x \mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \qquad f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}$$

3) En déduire que f se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et donner les valeurs de $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer sa classe, c'est-à-dire la plus grande valeur de $k \in \mathbb{N}$ qui fait que la fonction est de classe $\mathscr{C}^k$.

$$f(x) = x|x| \qquad g(x) = \begin{cases} x^n & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 16 ($\star$)**.** Soit f une fonction polynômiale. Montrer que l'équation $f(x) = e^x$ n'a qu'un nombre fini de solutions. *Indication : on pourra s'inspirer du résultat de l'exercice 3.*

Convexité

Exercice 17. Soit $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions convexes. Montrer que si g est croissante, alors $g \circ f$ est convexe. Donner un contre-exemple si on omet l'hypothèse "g est croissante".

Exercice 18 (Inégalités de convexité)**.** 1) Montrer que $x \mapsto -\ln x$ est convexe. En déduire :

$$\forall x_1, \cdots, x_n > 0 \qquad \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

2) Montrer que $x \mapsto \ln(\ln x)$ est concave sur $\left]1, +\infty\right[$. En déduire :

$$\forall a, b > 1 \qquad \ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln a \ln b}$$

3) Démontrer : $\forall x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}_+^* \qquad \dfrac{n}{\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$

Exercice 19. En utilisant un argument de convexité, montrer que

$$\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que si f admet un minimum local en a, alors ce minimum est global. Que peut-on dire si f admet un maximum local en a ?

Exercice 21. Soit f une fonction convexe majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.