TD 13 : Limites, continuité

Limites

Exercice 1 (*Calcul de limites*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(3x^3+x-2)^2}{(x-1)^6}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \cos(e^x)$

4) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+2x}-x$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{x+8}-3}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor$

8) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\sin x$

Exercice 2 (*Limites par la dérivée*)**.** Déterminer, si elles existent, les limites suivantes :

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

2) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

3) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$

4) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1}$

5) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)\sin x}{x^2}$

6) $\displaystyle\lim_{x\to 0} e^{\frac{x}{\cos x-1}}$

7) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(3+x)-\ln 3}{\ln(2+x)-\ln 2}$

8) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan(5x)}{\sin(2x)}$

Exercice 3. Soit $f : x \mapsto \dfrac{\lfloor x+\frac{1}{2}\rfloor}{x}$. Déterminer, si elles existent, les limites de f en 0, en $\dfrac{1}{2}$ et en $+\infty$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction T-périodique qui admet une limite en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 5 ($\star\star$)**.** Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ croissante positive. On suppose $f(x+1)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Continuité

Exercice 6. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? en 1 ?

Exercice 7. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x} - \dfrac{2}{1-x^2}$. Déterminer l'ensemble de définition de g. En quel(s) point(s) peut-on prolonger par continuité la fonction g ?

Exercice 8. Soit $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \begin{cases} (1+\alpha x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x>0 \\ \beta & \text{si } x<0 \end{cases}$.

Déterminer une CNS sur α et β pour que f admette un prolongement par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $X\subset\mathbb{R}$. Donner une caractérisation de l'assertion "X est dense dans $\mathbb{R}$" avec des suites.

En déduire que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, notée $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$, est discontinue en tout point $a\in\mathbb{R}$.

Exercice 10. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continues telles que

$$\forall x,y\in\mathbb{R} \qquad f(x+y) = f(x)+f(y)$$

On procèdera par analyse-synthèse, en déterminant f sur $\mathbb{N}$, puis $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{Q}$, puis $\mathbb{R}$.

Exercice 11 ($\star$)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(2x)=f(x)$. Montrer que f est constante.

Exercice 12 ($\star\star$)**.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$. Montrer que f est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$ et continue en tout point de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Théorèmes sur la continuité

Exercice 13 (Un classique !)**.** Soit P un polynôme réel de degré impair. Montrer que P admet au moins une racine réelle.

Exercice 14. Soit $f:\left[0,1\right]\to\left[0,1\right]$ continue. Montrer que f admet au moins un point fixe. *Indication : on pourra considérer l'application* $g: x\mapsto f(x)-x$.

Exercice 15. Soit $f,g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions continues. On suppose que f est bornée. Montrer que $f\circ g$ et $g\circ f$ sont bornées.

Exercice 16. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer qu'il existe un unique réel c tel que $f(c)=c$. Ce résultat est-il vrai si f est croissante ?

Exercice 17. Montrer que l'équation $\sqrt{x^2-\pi}\sin x+x^2\cos x=-1$ admet au moins une solution.

Exercice 18. Existe-t-il une application bijective et continue de $\left[0,1\right]$ dans $\mathbb{R}$? de $\left[0,1\right[$ dans $\mathbb{R}$? de $\left]0,1\right[$ dans $\mathbb{R}$?

Exercice 19. On dit qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est <u>coercive</u> si $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Montrer que si f est coercive et continue, alors elle atteint son minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0\in\mathbb{R}\qquad\forall x\in\mathbb{R}\qquad f(x)\geq f(x_0)$$

Exercice 20 ($\star$)**.** Un cycliste parcourt une distance de 20 km en une heure. Montrer qu'il existe un intervalle de temps d'une demi-heure pendant lequel ce cycliste aura parcouru exactement 10 km. (La demi-heure doit commencer après son départ et se terminer avant son arrivée).

Exercice 21. Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute fonction qui tend vers $+\infty$ en $+\infty$ est croissante au voisinage de $+\infty$.
2) Toute fonction périodique possède une plus petite période strictement positive.
3) Toute fonction continue sur un intervalle borné est bornée.
4) La fonction partie entière est continue sur $\left[0,1\right[$.
5) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un intervalle ouvert.
6) S'il existe une suite (x_n) convergeant vers a telle que $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$, alors f est continue en a.