TD 11-12 : Indications

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 (*Bornes sup et inf, pratique*)**.**

Exercice 2 (*Bornes sup et inf, théorique*)**.** Pour trouver $\sup|A|$, considérer les cas $A = \left[1,4\right]$ et $A = \left[-3,-2\right]$. En se basant sur ces exemples, que vaut $\sup|A|$?

Exercice 3. 1) Raisonner par l'absurde.

2) Raisonner par l'absurde : supposer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\left[M-\delta, M\right]$ contienne un nombre fini d'éléments de A. Considérer le plus grand de ces éléments (cela a un sens car $A \cap \left[M-\delta, M\right]$ est un ensemble fini).

Nombres rationnels, densité

Exercice 4 (*Nombres rationnels*)**.** 1) Raisonner par l'absurde. Passer au carré sans faire apparaitre de "double racine", i.e. $\sqrt{x}\times\sqrt{y}$.

2) Idem ! Mais il faut là encore limiter le nombre de "double racine" en passant au carré astucieusement.

Exercice 5 (*Densité*)**.**

Convergence de suites

Exercice 6 (*Sens de variation*)**.**

Exercice 7.

Exercice 8 (*Limite de suites*)**.**

Exercice 9 (*Série harmonique*)**.** Étudier la fonction $\ln(1+x)-x$

Appliquer le résultat précédent à $x = \dfrac{1}{k}$, pour k allant de 1 à n.

Exercice 10 (***Moyenne de Césaro***)**.** 1) Il faut sortir les ε ! Écrivez les définitions de $u_n \to 0$ (ce qu'on sait) et $v_n \to 0$ (ce qu'on veut montrer). Utiliser l'indication et majorer chaque terme par du membre de droite par $\dfrac{\varepsilon}{2}$ pour avoir $|v_n| \leq \varepsilon$.

2) Poser $U_n = u_n - \ell$ et $V_n = v_n - \ell$.

3) La réponse est non ! Chercher un exemple de suite (u_n) qui n'admet pas de limite et regarder sa moyenne de Césaro... Avec un peu de chance...

4) Il faut à nouveau utiliser la définition.

Exercice 11. Calculer quelques termes pour conclure et trouver une idée de preuve.

Exercice 12. Un sens est évident. Pour l'autre, en appelant $\ell = \lim u_n$, on remarquera qu'on ne peut pas assurer, a priori, que $\ell \in \mathbb{Z}$. On peut donc montrer que $\ell \in \mathbb{Z}$ en raisonnant par l'absurde : il faut utiliser la définition de la convergence, avec .

Exercice 13 (*Suites définies implicitement*)**.**

Exercice 14 ($\star$)**.** 1) Si $u_{\varphi(n)} \to \alpha$, que dire de la sous-suite $(u_{3\varphi(n)})$?

2) Si (u_n) converge, elle ne peut avoir qu'une seule valeur d'adhérence.

3) Par Bolzano-Weierstrass, (u_n) admet une valeur d'adhérence α. En utilisant la question 1 et le caractère borné de (u_n), montrer que $\alpha = 0$. Ainsi, (u_n) admet une unique valeur d'adhérence. Pour montrer que (u_n) converge vers 0, il faut nier la définition de "$u_n \to 0$" et montrer que cela conduirait à l'existence d'une autre valeur d'adhérence non nulle.

Exercice 15 ($\star$)**.** Si cette suite était convergente, elle serait stationnaire par l'exercice 12...

Exercice 16 ($\star\star$)**.** S'inspirer de l'exercice / l'exemple où on trouve que $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k! = 1$

Suites extraites, adjacentes, etc.

Exercice 17.

Exercice 18.

Exercice 19. Montrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Exercice 20.

Exercice 21. Pour (u_n), on pourra raisonner par encadrement. Et pour (v_n)... aussi ! L'indication avec w_n n'est pas nécessaire...

Exercice 22 ($\star$)**.** Utiliser la définition de (u_n) est non majorée : $\forall M \in \mathbb{R}$... et utiliser différentes valeurs de M pour construire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ en construisant les valeurs de $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, etc. à chaque terme.

Exercice 23 (Suite complexe)**.**

Exercice 24. Passer par les complexes.

Suites récurrentes

Exercice 25.

Exercice 26 (*Suites récurrentes doubles*)**.**

Exercice 27.

Exercice 28 (Suites récurrentes, cas général)**.**

Exercice 29 ($\star$)**.**