TD 11-12 : Nombres réels, suites

Bornes supérieures et inférieures

Exercice 1 (*Bornes sup et inf, pratique*)**.** Lorsqu'elles existent, déterminer les bornes supérieures et inférieures des ensembles suivants :

$$A = \left[1, 15\right[\qquad B = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

$$C = \left\{ e^{-\frac{1}{n}} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad D = \left\{ x(1+x) - \ln(1+x) \mid x \in \left[0,1\right] \right\}$$

$$E = \left\{ \cos\left(\frac{1}{n}\right) \;\middle|\; n \in \mathbb{N}^* \right\} \qquad F = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \right\}$$

Exercice 2 (*Bornes sup et inf, théorique*)**.** Soit $A, B \subset \mathbb{R}$ deux parties non vides bornées.

1) On définit l'ensemble
$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\}$$
Montrer que $A + B$ est majoré et que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

2) On définit l'ensemble
$$|A| := \{\, |a| \mid a \in A\}$$
Montrer que $|A|$ est majoré et déterminer $\sup |A|$.

Exercice 3. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ majorée. On note $M = \sup A$. On suppose que $M \notin A$.

1) Justifier que A n'admet pas de maximum.
2) ($\star$) Montrer que pour tout $\delta > 0$, l'intervalle $\left[M - \delta, M\right]$ contient une infinité d'éléments de A.

Nombres rationnels, densité

Exercice 4 (*Nombres rationnels*)**.** Rappel : si $x, y \in \mathbb{Q}$, alors $x + y$, $x - y$, xy et $\dfrac{x}{y}$ (si y est non nul) sont tous rationnels.

1) Soit $x, y \in \mathbb{Q}$ positifs tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ sont irrationnels. Montrer que $\sqrt{x} + \sqrt{y}$ est irrationnel.
2) Montrer que les nombres $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ ainsi que $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ sont irrationnels.
On peut utiliser le résultat suivant : si n ne s'écrit pas comme le carré d'un entier, alors $\sqrt{n}$ est irrationnel.

Exercice 5 (*Densité*)**.** Montrer que les ensembles suivants sont denses dans $\mathbb{R}$:

$$X = \left\{ \sqrt[3]{r} \;\middle|\; r \in \mathbb{Q} \right\} \qquad (\star) \quad Y = \left\{ \frac{k}{2^n} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Convergence de suites

Exercice 6 (*Sens de variation*)**.** Étudier la monotonie (en précisant si elle est stricte) des suites de termes généraux suivants :

$$a_n = \cos(n\pi) \qquad b_n = \frac{2 + (-1)^n}{3^n} \qquad c_n = \frac{n^n}{n!}$$

Exercice 7. Vrai ou faux ? Justifier.

1) Toute suite croissante admet une limite (finie ou non).
2) Toute suite décroissante est majorée.
3) Soit $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Si $|u_n| \to \ell$, alors $u_n \to \ell$ ou $u_n \to -\ell$.
4) Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante à partir d'un certain rang.
5) La somme de deux suites convergentes est convergente.
6) La somme de deux suites divergentes est divergente.
7) La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est une suite divergente.

Exercice 8 (*Limite de suites*)**.** Déterminer, lorsqu'elle existe, la limite des suites de termes généraux suivants :

1) $u_n = \dfrac{\arccos\left(\frac{1}{n}\right)}{n^2}$
2) $u_n = \sqrt{n^2+1} - 2n$
3) $u_n = \dfrac{n^2+5n}{-5n^3+\cos n}$
4) $u_n = \arctan(e^n)$
5) $u_n = \sqrt[n]{3+\sin n}$
6) $u_n = \sqrt[n]{n^2}$
7) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
8) $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

Exercice 9 (*Série harmonique*)**.** Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a $\ln(1+x) \leq x$.

En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1)$, puis conclure sur la nature de la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right)_n$.

Exercice 10 (***Moyenne de Césaro***)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle. On définit la suite (v_n) par

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k$$

1) On suppose que $u_n \to 0$. Montrer que $v_n \to 0$. Indication : pour tous entiers naturels $n \geq N$

$$|v_n| \leq \left|\frac{u_1+\cdots+u_{N-1}}{n}\right| + \left|\frac{u_N+\cdots+u_n}{n}\right|$$

2) En déduire que si $u_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors $v_n \to \ell \in \mathbb{R}$.
3) La réciproque est-elle vraie ?
4) Montrer que si $u_n \to +\infty$, alors $v_n \to +\infty$.

Exercice 11. Étudier la nature de la suite de terme général $u_n = \left\lfloor 3 + \dfrac{(-1)^n}{n} \right\rfloor$.

Exercice 12. Soit (u_n) une suite à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Montrer que (u_n) est convergente si et seulement si elle est stationnaire.

Exercice 13 (*Suites définies implicitement*)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) d'inconnue $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$x + \tan x = n$$

1) Montrer que l'équation (E_n) possède une unique solution x_n.
2) Montrer que la suite (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 ($\star$)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée telle que $u_n + \frac{1}{2}u_{3n} \to 0$.

1) Montrer que si α est une valeur d'adhérence de (u_n), alors -2α aussi.
2) On suppose que (u_n) converge. Déterminer sa limite.
3) Montrer que (u_n) converge.

Exercice 15 ($\star$)**.** Étudier la nature de la suite (u_n) où u_n est la n–ième décimale de $\sqrt{2}$.

Exercice 16 ($\star\star$)**.** Déterminer la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^{-1}$.

Suites extraites, adjacentes, etc.

Exercice 17. Soit (u_n) une suite telle que les suites extraites (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{3n}) sont convergentes. Montrer que (u_n) est convergente.

Exercice 18. Montrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\left(n + \frac{1}{n}\right)\pi\right)$ est divergente.

Exercice 19. Montrer que les suites de termes généraux suivants convergent :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad\qquad v_n = u_n + \frac{1}{n}$$

Exercice 20. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. En déduire que (S_n) converge.

Exercice 21. Déterminer la limite éventuelle des suites de termes généraux

$$u_n = \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{\sqrt{n}} \qquad\qquad v_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \quad \text{avec } x \in \mathbb{R}$$

Pour v_n, on pourra considérer la suite définie par $w_n = v_n + \frac{1}{10^n}$.

Exercice 22 ($\star$)**.** Montrer qu'une suite (u_n) est non majorée si et seulement s'il existe une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$.

Exercice 23 (Suite complexe)**.** Soit (z_n) une suite complexe telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\overline{z}_n)$. Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

Exercice 24. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(k\theta)}{2^k}$. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

Suites récurrentes

Exercice 25. Déterminer le terme général de la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{4}{5}u_n + 1$

Exercice 26 (*Suites récurrentes doubles*)**.** Déterminer le terme général des suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$, $u_1 = 0$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$
2) $u_0 = 1$, $u_1 = -1$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n$
3) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$
4) $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = e^{i\frac{\pi}{4}}u_{n+1} + 2iu_n$

Exercice 27. Déterminer la suite réelle définie par

$$\begin{cases} u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2 \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases}$$

On pourra poser $v_n = u_n - 2$.

Exercice 28 (Suites récurrentes, cas général)**.** Étudier les suites (u_n) définies par

1) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$
2) $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n^2$ (on discutera selon la valeur de u_0).
3) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \arctan(u_n)$
4) $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = e^{u_n} - 1$

Exercice 29 ($\star$)**.** On cherche toutes les suites réelles (u_n) vérifiant (E) : $u_{n+1} - 3^{2^n}u_n = 3^{n^2}$.

1) Soit (u_n) une solution. On note $C = u_0 \in \mathbb{R}$ le premier terme de la suite. Exprimer u_1, u_2, u_3 en fonction de C.
2) En déduire toutes les suites solutions de l'équation homogène (E_H) : $u_{n+1} - 3^{2^n}u_n = 0$ et les exprimer en fonction de $C = u_0$.
3) Déterminer une solution particulière de (E). On appliquera la méthode de la variation de la constante : on remplace C par C_n dans la solution de (E_H), puis on injecte cette expression dans (E), et enfin on trouve une suite (C_n) qui convient.
4) En déduire les solutions de (E).