TD 10 : Corrigé

ED d'ordre 1

Exercice 1 (ED linéaires d'ordre 1)**.** On donne directement la solution générale de l'équation différentielle / du problème de Cauchy.

1) $y(x) = Ce^{-x} + \frac{1}{2}e^x \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
2) $y(x) = (C+x)e^x - 1 \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
3) $y(x) = e^{-x}\ln\left(\frac{1}{3}(e^x+1)\right)$
4) $y(x) = Ce^{2x} + \frac{2}{5}e^x\sin(2x) - \frac{1}{5}e^x\cos(2x) \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
5) $y(x) = \dfrac{C}{e^x+1} \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
6) $y(x) = e^x - e^{x^2}$
7) $y(x) = C\mathrm{ch}x + \mathrm{ch}^2 x + 1 \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
8) $y(x) = \dfrac{C-x}{x^2+1} \quad$ avec $C \in \mathbb{R}$
9) $y(x) = 0$ (c'est une solution évidente et c'est la seule par le théorème de Cauchy Lipschitz

Exercice 2 (ED linéaires d'ordre 1, bis)**.** On donne directement la solution générale de l'équation différentielle / du problème de Cauchy.

1) $I = \mathbb{R}_+^*$, $y(x) = Cx^2 - 2\ln x - 1$
2) $I = \left]-1,1\right[$, $y(x) = Ce^{\arccos x} + 1$

Note : I a été pris de cette manière pour pouvoir mettre l'équation sous forme résolue en divisant par $\sqrt{1-x^2}$. On peut en fait résoudre l'équation sur $\left[-1,1\right]$ par analyse-synthèse.
Analyse : soit y une solution de l'équation sur $\left[-1,1\right]$. Par ce qui précède, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \left]-1,1\right[\qquad y(x) = Ce^{\arccos x} + 1$$

Comme de plus y est continue, on a nécessairement

$$y(1) = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} y(x) = Ce^0 + 1 = 1 + C$$

$$y(-1) = \lim_{\substack{x\to -1\\ x<-1}} y(x) = Ce^{\pi} + 1 = 1 + Ce^{\pi}$$

Cependant, il faut aussi que y soit dérivable. On distingue alors deux cas.

- Si $C = 0$, alors pour tout $x \in \left[-1,1\right]$, on a $y(x) = 1$, qui est clairement dérivable.
- Si $C \neq 0$, supposons par l'absurde que y soit dérivable. Or, pour tout $x \in \left[-1,1\right]$, on a :

$$\frac{y(x)-1}{C} = e^{\arccos x}$$

En passant au logarithme, on en déduit que

$$\arccos x = \ln\left(\frac{y(x)-1}{C}\right)$$

et donc en particulier, arccos serait dérivable sur $\left[-1,1\right]$ par composée de telles fonctions, ce qui serait absurde.

Finalement, on a nécessairement $C=0$, donc $y\equiv 1$.
Synthèse : on vérifie trivialement que $y\equiv 1$ est solution sur $\left[-1,1\right]$. Finalement, l'unique solution sur $\left[-1,1\right]$ de l'équation est $\boxed{y\equiv 1}$

3) $y(x)=\frac{1}{5}\left(\left(x-2\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arccos x}+2e^{-\arccos x}\right)$

4) La fonction tangente est trivialement solution. C'est la seule puisqu'il s'agit d'un problème de Cauchy.

Exercice 3 (ED avec raccord)**.**

Exercice 4.

Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 5 (ED linéaires d'ordre 2)**.**

Exercice 6 (Problème de Cauchy d'ordre 2)**.**

Exercice 7 (ED déphasée)**.**

Exercice 8.