TD 10 : Équations différentielles

ED d'ordre 1

Exercice 1 (ED linéaires d'ordre 1)**.** Résoudre les équations suivantes :

1) $y' + y = e^x$
2) $y' - y = 1 + e^x$
3) $\begin{cases} y' + y = \dfrac{1}{1+e^x} \\ y(\ln 2) = 0 \end{cases}$
4) $y' - 2y = e^x \cos(2x)$
5) $(1+e^x)y' + e^x y = 0$
6) $\begin{cases} y' - 2xy = -(2x-1)e^x \\ y(1) = 0 \end{cases}$
7) $\operatorname{ch} x\, y' - \operatorname{sh} x\, y = \operatorname{sh}^3 x$
8) $(1+x^2)y' + 2xy = -1$
9) $\begin{cases} y' + \arctan(\sqrt{1+e^x})y = 0 \\ y(\pi e^{-1}) = 0 \end{cases}$

Exercice 2 (ED linéaires d'ordre 1, bis)**.** Résoudre les équations suivantes sur un intervalle I convenable (s'il y en a plusieurs, choisissez-en un) :

1) $xy' - 2y = 4\ln x$
2) $\sqrt{1-x^2}\, y' + y = 1$
3) $\begin{cases} y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} y = e^{\arccos x} \\ y(0) = 0 \end{cases}$
4) $\begin{cases} y' - \tan(x)y = 1 \\ y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases}$

Exercice 3 (ED avec raccord)**.** On considère l'équation $(E) : xy' + y = 0$.

1) Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ puis sur $\mathbb{R}_-^*$.
2) Si y est une solution de (E) définie sur $\mathbb{R}$, que serait la valeur de $y(0)$?
3) Peut-on trouver une solution de (E) sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. Soit a, b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$. On considère l'ED

$$(E) : \quad y' + a(t)y + b(t)y^2 = 0$$

On admettra que, si y est une solution qui n'est pas identiquement nulle, alors y ne s'annule jamais. Dans la première question, on considère y une solution de (E) non identiquement nulle.

1) En posant $z = \dfrac{1}{y}$, se ramener à une équation linéaire en la fonction z.
2) Résoudre l'équation (E).

Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 5 (ED linéaires d'ordre 2)**.** Résoudre les équations suivantes :

1) $4y'' + 8y' + 5y = 2e^x$
2) $y'' - 5y' + 4y = e^x$
3) $y'' - 4y' + 4y = 4e^{2x}$
4) $y'' + 4y = 3\cos^2 x$
5) $y'' + iy' = x + 3$
6) $y'' + 3y' - 4y = ix^2$

Exercice 6 (Problème de Cauchy d'ordre 2)**.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants :

1) $\begin{cases} y'' + 4y = \cos(3x) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

2) $\begin{cases} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$

Exercice 7 (ED déphasée)**.** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On souhaite déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) = f(\lambda - x)$$

1) Montrer que si f vérifie cette condition, alors f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2) En déduire l'ensemble des fonctions f vérifiant cette condition.

Exercice 8. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad f'(x) + f(-x) = e^x$$

Indication : en justifiant, on pourra dériver l'égalité ci-dessus et montrer que f vérifie une équation différentielle.