TD 9 : Primitives, intégrales

Primitives

Exercice 1 (Trouver une primitive)**.** Déterminer, sur un intervalle approprié, une primitive des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto xe^{-3x^2}$

2) $x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$

3) $x \mapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

4) $x \mapsto \tan x$

5) $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$

6) $x \mapsto \dfrac{x^2}{1+x^2}$

7) $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln x}$

8) $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$

9) $x \mapsto \operatorname{th} x$

10) $x \mapsto \dfrac{\tan x}{\cos^2 x}$

11) $x \mapsto \cos x \sin^3 x$

12) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

13) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+3}$

14) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$

15) $x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$

16) $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$

17) $x \mapsto \sin(2x)\cos^2 x$

Exercice 2 (Trouver toutes les primitives)**.** Déterminer *toutes* les primitives des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sin(3x) \quad \text{sur } \mathbb{R} \qquad g : x \mapsto \frac{1}{x^7} \quad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \qquad h : x \mapsto \left|x^2-4x+3\right| \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Techniques d'intégration

Exercice 3 (Intégration par parties)**.** Calculer les intégrales suivantes par une IPP :

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^1 \arctan x \, dx \qquad \mathcal{I}_2 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\, dx \qquad \mathcal{I}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(4x)\, dx \qquad \mathcal{I}_4 = \int_0^{\pi} x^2 e^{-2x}\, dx$$

Exercice 4 (Intégrales de fractions rationnelles)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{x^2-4x+4}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2}$

3) $\displaystyle\int_6^8 \frac{dt}{t^2-4t-5}$

4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{8x^2+50}$

Exercice 5 (Changement de variables)**.** En utilisant un changement de variable, calculer les intégrales suivantes :

$\displaystyle\mathcal{I}_1 = \int_1^3 \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$ en posant $u = \sqrt{x}$

$\displaystyle\mathcal{I}_2 = \int_3^4 \frac{dx}{x\sqrt{x-2}}$ en posant $z = \sqrt{x-2}$

$\displaystyle\mathcal{I}_3 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{(1+t^2)\sqrt{1+t^2}}$ en posant $t = \tan u$

$\displaystyle\mathcal{I}_4 = \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ en posant $u = \cos x$

$\displaystyle\mathcal{I}_5 = \int_0^1 \sqrt{1+x}\, dx$ à vous de trouver

$\displaystyle\mathcal{I}_6 = \int_1^2 \frac{1}{e^{-x}+1}dx$ à vous de trouver

Exercice 6 (Équations et intégrales)**.**

1) On pose $\mathcal{I} = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \operatorname{sh} x \, dx$. Faire deux intégrations par parties pour obtenir une équation sur $\mathcal{I}$. Calculer $\mathcal{I}$.

2) Pour tout $x > 1$, on pose $\mathcal{I}(x) = \displaystyle\int_1^x \sin(\ln t)\, dt$. Par la même méthode, calculer $\mathcal{I}(x)$. En déduire une primitive de $t \mapsto \sin(\ln t)$ sur $]0, +\infty[$.

Règles de Bioche

On suppose qu'on souhaite calculer une intégrale de la forme $\int_a^b R(\cos x, \sin x)dx$, où R est une fonction rationnelle (cf exercices 7 et 8 pour des exemples). Les règles de Bioche permettent de trouver un changement de variables qui, **s'il est licite**, permettra *parfois* de calculer l'intégrale. On regarde pour cela l'expression

$$w(x) := R(\cos x, \sin x) \times \boxed{dx}$$

- Si $w(x) = w(-x)$, alors on peut poser $t = \cos x$. avec la règle $d(-x) = -dx$
- Si $w(x) = w(\pi - x)$, alors on peut poser $t = \sin x$. avec la règle $d(\pi - x) = -dx$
- Si $w(x) = w(\pi + x)$, alors on peut poser $t = \tan x$. avec la règle $d(\pi + x) = dx$
- Dans tous les cas, on peut poser $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ et utiliser les formules d'angle moitié.

Exercice 7 (Règles de Bioche)**.** En utilisant les règles de Bioche, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos t}dt$ 3) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\sin^2 x}dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x - \cos^2 x}dx$

Exercice 8. En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2-\sin x}$ 3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos x}dx$ 4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

À vous de jouer

Exercice 9 (Calcul d'intégrales)**.** Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x}{1-x^2}dx$

2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta$

3) $\displaystyle\int_1^4 \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$

4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan^2 x \cos^5 x\, dx$

5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$

6) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}dx$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

7) $\displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln x)\, dx$

8) $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \mathrm{sh}^3 x\, dx$

9) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{ix}\sin x\, dx$

10) $\displaystyle\int_1^8 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[3]{x}}dx$

11) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 x \tan x\, dx$

12) $(\star)$ $\displaystyle\int_a^b \frac{dt}{t-\alpha}$ où $\begin{cases} a, b \in \mathbb{R} \\ \alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{cases}$

Exercice 10 (Intégrales de Wallis)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt$.

1) Calculer I_0 et I_1.
2) Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.
3) En déduire la valeur de I_n.

Exercice 11 $(\star)$**.** Montrer que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}dx = \frac{\pi}{4}$.

En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}+t}$.