TD 7–8 : Fonctions usuelles

Généralités sur les fonctions

Exercice 1. Vrai ou faux ? Justifier.

1) Si $f : D \to \mathbb{R}$ est paire et impaire, alors f s'annule sur D.
2) Toute fonction croissante est ou bien strictement croissante, ou bien constante.
3) La somme de deux fonctions monotones est une fonction monotone.
4) Le produit de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.
5) Il existe une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ paire et injective, avec $D \neq \varnothing$.
6) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$ est minorée sur $\mathbb{R}_+$.
7) Toute fonction croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ est minorée sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 2. Déterminer les ensembles de définition des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^3+2x^2+x} \qquad f_2 : x \mapsto \ln(\sin x) \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2-6x+5}{-x^2+2x+8}} \qquad f_4 : x \mapsto \frac{\sqrt{x^2-6x+5}}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$$

Exercice 3. Soit $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que f est paire et g est impaire. Déterminer la parité de fg. Peut-on déduire une information sur l'éventuelle parité de $f+g$?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On pose $g : x \mapsto \dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

1) Vérifier que $f = g+h$, que g est paire et que h est impaire.
2) Montrer que la décomposition ci-dessus est unique, c'est-à-dire que s'il existe deux fonctions $G, H \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telles que $f = G+H$ avec G paire et H impaire, alors $G = g$ et $H = h$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction.

1) On suppose que f est impaire et positive. Montrer que f est constante.
2) On suppose que f est paire et croissante. Montrer que f est constante.
3) On suppose que f est périodique et croissante. Montrer que f est constante.

Dérivabilité et études de fonctions

Exercice 6. Déterminer les ensembles de définition, de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

1) $x \mapsto (x^4+1)^5$ 2) $x \mapsto |x+6|$ 3) $x \mapsto \dfrac{1}{(1-x^2)^3}$ 4) $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$

Exercice 7. Par une étude de fonction, démontrer les assertions suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad e^x \geq 1+x$
2) $\forall x > -1 \qquad \ln(1+x) \leq x$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \qquad |\sin(x)| \leq |x|$

Exercice 8. On pose $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

1) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer sa dérivée (sur $\mathbb{R}^*$).
2) Montrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.
3) Est-ce que f' est continue ?

Exercice 9. Étudier les fonctions suivantes. On veillera à bien réduire l'intervalle d'étude.

1) $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$
2) $g : x \mapsto x \ln |x|$

Exercice 10 ($\star$)**.** Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ dérivable telle que $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad f'(x) \leq f(x)$$

Montrer que f est identiquement nulle sur $\mathbb{R}_+$. *Indication : étudier* $g : x \mapsto e^{-x} f(x)$.

Fonctions puissances, exponentielle, etc.

Exercice 11. Déterminer, lorsqu'elles existent, les limites des fonctions suivantes, aux points indiqués.

1) $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^2}$ en $+\infty$.
2) $x \mapsto x e^{\frac{1}{x}}$ en 0^+.
3) $x \mapsto x^{\frac{1}{x}}$ en $+\infty$.
4) $x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ en 0^+.
5) $x \mapsto x^{-3} \ln(1+e^x)$ en $+\infty$.
6) $x \mapsto \exp\left(-\dfrac{1}{x^3}\right) \times \ln x$ en 0^+.

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes :

1. $2e^{3x} - 5e^{2x} + 2e^x \leq 0$
2. $\ln(3-x) + \ln(2) - 2\ln(x+1) \geq 0$.
3. $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$

Exercice 13. Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^x$. Par une étude de fonction, montrer que f admet un minimum sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner la valeur du minimum ainsi que le ou les points en lesquels il est atteint.

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes $\begin{cases} x + y & = 7 \\ \ln x + \ln y & = 10 \end{cases}$ et $\begin{cases} 8^x & = 10y \\ 2^x & = 5y \end{cases}$

Fonctions trigonométriques

Exercice 15. Simplifier les expressions suivantes :

1. $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
2. $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{9\pi}{4}\right)\right)$
3. $\cos(2\arccos x)$
4. $\cos(2\arcsin x)$
5. $\tan(2\arctan x)$
6. $\sin(2\arctan x)$
7. $\cos^2(\arctan x)$
8. $\tan(\arcsin x)$

Exercice 16. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\arccos x = \arcsin(2x)$

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(kx)$. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\operatorname{sh}(kx)$

Exercice 18. 1) Montrer que la fonction sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une bijection. On notera argsh sa bijection réciproque.

2) Montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer sa dérivée. Dresser le tableau de variations de la fonction argsh.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{argsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$.

Exercice 19. On souhaite montrer de deux façons différentes l'identité : $\forall x \in \left[-1,1\right] \qquad \arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$

1) On pose $f : x \mapsto \arccos x + \arcsin x$. Dériver f et en déduire le résultat voulu.

2) (a) Montrer que pour tout $x \in \left[-1,1\right]$, il existe $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ tel que $x = \sin y$.

(b) En déduire le résultat voulu.

Exercice 20. Démontrer que pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$. Et pour $x \in \left]-\infty,0\right[$?

Exercice 21. Soit $a, b \in D_{\tan}$ tels que $a+b \in D_{\tan}$.

1) Rappeler la formule qui exprime $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et de $\tan b$.

2) En déduire $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

Exercice 22 ($\star$). 1) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{ch}(x)) = e^x$?

2) Peut-on trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\operatorname{sh}(x)) = e^x$?