TD 6 : Applications

Dans tout ce TD, E, F, G désignent des ensembles quelconques.

Images directes, images réciproques, etc.

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer (en justifiant) les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}) \qquad f([0,1]) \qquad f^{-1}(\{3\}) \qquad f^{-1}(]-\infty,5])$$

Exercice 2. Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

1) Montrer que $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
2) Exhiber un cas particulier où l'implication réciproque est fausse.
3) Montrer que si f est injective, alors $f(A) \subset f(A') \implies A \subset A'$.

Exercice 3. Soit $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de E.

1) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2) Exhiber un cas particulier où l'inclusion réciproque est fausse.
3) Montrer que si f est injective, alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 4. Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que : $\quad \forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$
2) Montrer que : $\quad \forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad A \subset f^{-1}(f(A))$

Exercice 5. Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$.

1) Montrer que $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$ (i.e. $\quad \forall x \in E \quad \mathbb{1}_{A\cap B}(x) = \mathbb{1}_A(x)\mathbb{1}_B(x)$)
2) Montrer que $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
3) Montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$ (ici “1” désigne la fonction $x \in E \mapsto 1$)
4) Exprimer $\mathbb{1}_{A\setminus B}$ en fonction de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$.

Exercice 6. Soit $f : x \mapsto x^2$. Déterminer les parties stables par f parmi les ensembles suivants :

$$[0,1] \qquad [1,2] \qquad [-1,1] \qquad \mathbb{R}_+$$

Exercice 7. Soit $f : E \to E$ une application. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E, toutes stables par f. Montrer que les ensembles $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont stables par f.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

Exercice 8. Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$\begin{array}{llll} f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} & f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} & f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} & f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ \quad n \mapsto n+1 & \quad n \mapsto n+1 & \quad x \mapsto x^3 & \quad z \mapsto z^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C} & f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 & f_7 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 & f_8 : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \\ \quad z \mapsto e^z & \quad x \mapsto (x, -x) & \quad (x,y) \mapsto (x+y, x-y) & \quad (a,b) \mapsto \dfrac{a}{b} \end{array}$$

Exercice 9. Soit f et g dans $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})$ les applications définies par :

$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1) Montrer que f et g ne sont pas bijectives.
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles bijectives ?

Exercice 10. Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x,y,z) = (-x+y+z,\, z,\, y)$$

Calculer $F \circ F$. Que peut-on en déduire sur F ?

Exercice 11. On pose $E = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ et $f : x \in E \mapsto \dfrac{2x+1}{x-3}$. Montrer que f est une bijection de E sur un ensemble F qu'on précisera. On donnera également l'expression de sa réciproque.

Exercice 12. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3) Montrer que si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Exercice 13. Soit $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).

1) Montrer que si p est injective alors $p = \mathrm{id}_E$.
2) Montrer que si p est surjective alors $p = \mathrm{id}_E$.

Exercice 14 (⋆⋆ Paradoxe de Cantor)**.** Soit E un ensemble non vide.

1) Construire un exemple simple d'injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2) Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$. En considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut être une surjection (et donc une bijection) de E sur $\mathscr{P}(E)$.
3) En déduire qu'il n'existe pas d'injection de $\mathscr{P}(E)$ dans E.
4) En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles (paradoxe de Russel).

Transformations du plan

Exercice 15. Décrire géométriquement la transformation géométrique correspondant aux applications de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$f_1(z) = z + i\sqrt{3} \qquad f_2(z) = iz \qquad f_3(z) = (1-i)z + 3i \qquad f_4(z) = 2iz + 1$$

Exercice 16. Donner l'expression explicite des transformations suivantes :

1) Rotation de centre $\Omega(1+i)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Homothétie de centre $A(2i)$ et de rapport 3.
3) Similitude directe de centre $B(1-i)$ de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.