TD 5 : Les complexes

Forme algébrique, conjugué, module

Exercice 1.

Exercice 2. On peut poser $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et trouver une condition sur a et b.
On peut aussi élever au carré et utiliser le fait que : $\forall u \in \mathbb{C} \qquad u\overline{u} = |u|^2$

Exercice 3. Dans le sens indirect, utiliser le fait que $u \in \mathbb{R} \iff u = \overline{u}$ pour conclure.
Dans le sens direct, poser $a \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z-i}{1-iz} = a$, puis exprimer z en fonction de a.

Exercice 4. On peut poser $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et trouver une condition sur a et b.
On peut aussi élever au carré et utiliser le fait que : $\forall u \in \mathbb{C} \qquad u\overline{u} = |u|^2$

Exercice 5. Utiliser l'identité remarquable en étant scrupuleux sur les détails.

Exercice 6. C'est une simple vérification en utilisant les propriétés du conjugué.

Exercice 7.

Exercice 8.
1) La formule se montre par récurrence. Écrivez bien le résultat auquel vous voulez arriver !
2) Écrire les quelques premiers termes de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k i^{k-1}$

Forme trigonométrique et trigonométrie

Exercice 9. Pour z_7, remarquer que $z_7 = e^{i0} + e^{i\alpha}$ et utiliser l'angle moitié.

Exercice 10. Remarquer qu'on est dans un cas d'égalité de l'inégalité triangulaire.

Exercice 11.

Exercice 12.
1) Pour la première partie, on peut écrire $\sin\alpha + \sin\beta$ comme étant la partie imaginaire d'un complexe donné et passer par l'angle moitié.
Pour la seconde partie, il faut regrouper astucieusement les sinus deux par deux avec la formule précédente.

Exercice 13. Réécrire les cosinus et sinus comme étant la partie réelle et la partie imaginaire d'une exponentielle complexe. Faites sortir cette partie réelle ou imaginaire de la somme et reconnaitre une somme usuelle.

Exercice 14 ($\star$). Poser $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, et réexprimer les deux conditions à montrer en fonction de θ.

Racines et résolution d'équations

Exercice 15.

Exercice 16.

Exercice 17.

Exercice 18. 1) Utiliser la délinéarisation.

Exercice 19. Il suffit d'utiliser les propriétés de la conjugaison complexe.

Exercice 20. Pour b) et c), il faut se ramener à la forme du a) par des réécritures.

Exercice 21.

Exercice 22.

Exercice 23 (Autour du complexe j)**.** Pour la question 3, trouver une racine évidente.

Exercice 24 ($\star$)**.** 1) Reconnaitre dans chaque cas une somme usuelle.

2) L'exercice précédent vous fournit une propriété utile sur j : c'est une racine du polynôme $1+z+z^2$.

Géométrie complexe

Exercice 25. Faire un dessin et visualiser la nature de ce triangle. Puis, démontrer cela rigoureusement en passant par la caractérisation en termes d'argument.

Exercice 26. 1) $|z+3| = |z-z_0|$ avec $z_0 = -3$.

2) Poser $z = a+ib$ et, par une réécriture, reconnaitre une expression de la forme $|z-z_0|^2 = \dots$

3) Utiliser la caractérisation en termes d'argument

4) Utiliser la caractérisation en termes d'argument