TD 4 : Sommes et produits

Calcul de sommes et produits

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- $1+2+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+2+1$
- $2+4+6+\cdots+2n$ puis $1+3+5+\cdots+(2n-1)$
- $\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n-1}{n}$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes

$$S_1 = \sum_{i=1}^{n} e^{2i} \qquad S_2 = \sum_{i=1}^{n} (i-1)(i+2) \qquad S_3 = \sum_{k=5}^{13} k \qquad S_4 = \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{4^{k+1}}$$

$$S_5 = \sum_{k=5}^{n+2} k^2 \qquad S_6 = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{2^k} \qquad S_7 = \sum_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k-1} \qquad S_8 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Simplifier les produits :

$$P_1 = \prod_{k=1}^{n} 2^k \qquad P_2 = \prod_{k=1}^{n} 2k \qquad P_3 = \prod_{k=2}^{n} \left(1-\frac{1}{k}\right) \qquad P_4 = \prod_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{2p+5}$$

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Démontrer que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on a : $\dfrac{1}{4k^2-1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2k-1} - \dfrac{1}{2k+1}\right)$

2) Calculer la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ deux familles de réels telles que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $x_i \leq y_i$.
Démontrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^k$ ou x est un réel différent de 1. Calculons S_n de deux façons.

1) Calculer $(1-x)S_n$ et déduire S_n.

2) Dériver la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ de deux façons, et en déduire S_n.

Exercice 7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ en fonction de n.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \min(i,j)$, $\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$, $\quad \sum_{1\leq i<j\leq n} ij$

(pour la dernière somme, on ne cherchera pas à calculer la somme $\sum_{i=1}^{n} i^3$).

Exercice 9 (⋆). Calculer $\sum_{k=1}^{100} \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$

Factorielles et Coefficient binomiaux

Exercice 10. 1) Écrire à l'aide de factorielles

(a) $17 \times 16 \times 15 \times 14$

(b) $16 \times 14 \times 12 \times \ldots \times 4 \times 2$

(c) $15 \times 13 \times 11 \times \ldots \times 5 \times 3 \times 1$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$$

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ $\quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$ $\quad$ et $\quad S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 12. 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} kk! = (n+1)! - 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. On souhaite calculer de deux manières différentes la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}.$$

1) (a) Démontrer que pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$ avec $k \leq n$, on a $\quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

(b) En déduire S_n .

2) Soit f la fonction définie pour tout $x \in \left[0,+\infty\right[$ par $f(x) = (1+x)^n$. On admet que f est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$.

(a) Calculer la dérivée de f de deux façons différentes.

(b) Conclure.

Exercice 14 (⋆). Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que $\quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$

2) En déduire $\quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k}.$