TD 2 : Corrigé partiel

Exercice 1.

Exercice 2.

Exercice 3.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7. Tout d'abord, calculons $\mathscr{P}(\{1\})$. On a

$$\mathscr{P}(\{1\}) = \{\ \varnothing, \{1\}\ \}$$

Pour y voir plus clair, posons $A = \varnothing$ et $B = \{1\}$, de sorte que $\mathscr{P}(\{1\}) = \{A, B\}$. Alors,

$$\begin{aligned} \mathscr{P}(\mathscr{P}(\{1\})) &= \mathscr{P}(\{A, B\}) \\ &= \{\ \varnothing, \{A\}, \{B\}, \{A, B\}\ \} \\ &= \boxed{\{\ \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{1\}\}, \{\varnothing, \{1\}\}\ \}} \end{aligned}$$

Exercice 8.

Exercice 9. • Montrons que $A = \mathbb{R}$. On raisonne par double inclusion.

- Par définition, $A = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \in \left]-n, n\right[\right\}$, donc $A \subset \mathbb{R}$.
- Montrons que $\mathbb{R} \subset A$. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrons que $x \in A$. Il se trouve que :

$$\begin{aligned} x \in A &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \in \left]-n, n\right[\\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad -n < x < n \\ &\iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad |x| < n \end{aligned}$$

  Il suffit donc de montrer cette dernière assertion. On peut par exemple poser pour n l'entier naturel immédiatement inférieur à $|x| + 100$. On aura bien ainsi $n \in \mathbb{N}^*$ et $n > |x|$. D'où $x \in A$, si bien que $\mathbb{R} \subset A$.

Finalement, $\boxed{A = \mathbb{R}}$

Exercice 10 ($\star$)**.**