TD 1 : Logique

Opérateurs logiques

Exercice 1. Soit P, Q deux assertions. À l'aide de tables de vérité, montrer les équivalences suivantes :

1) "non(P et Q)" équivaut à "non$P$ ou non$Q$"
2) "P et (Q ou R)" équivaut à "(P et Q) ou (P et R)"
3) "$P \implies Q$" équivaut à "non$Q \implies$ non$P$"
4) "$P \implies Q$" équivaut à "non$P$ ou Q"

Exercice 2. Soit P, Q, R trois assertions *fausses*.

1) Est-ce que $(P \implies Q) \implies R$ est vraie ?
2) Même question pour $P \implies (Q \implies R)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 3. Soit P, Q, R trois assertions. Quelle est la négation de $P \implies$ (non$Q$ et R) ?

Quantificateurs

Exercice 4. Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses. Si elles sont vraies, prouvez-les, si elles sont fausses, cherchez un contre-exemple.

1) $\exists p \in \mathbb{Z} \quad p$ est pair et p est premier
2) $\forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 + y + 1 > 0$
3) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x < 3 \implies x^2 < 9$
4) $\forall x \in \mathbb{R} \quad x^2 - 4x \geq 0 \implies (x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2)$
5) $\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \leq M$ (utiliser la négation)
6) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists m \in \mathbb{R} \quad m^2 = n$
7) $\exists! u \in \mathbb{R} \quad u^3 + u^2 = 0$
8) $\exists! (u, v) \in \mathbb{N}^2 \quad u^2 + v^2 = 4$

Exercice 5. 1) Reprendre l'exercice précédent et donner la négation des assertions 1) à 6).

2) $(\star)$ Faites de même pour l'assertion 7).

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer verbalement ("en français") la signification des assertions suivantes :

1) $\forall x \in I \quad f(x) \geq 0$
2) $\forall x_1, x_2 \in I \quad x_1 \leq x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2)$
3) $\exists \lambda \in \mathbb{R} \quad \forall x \in I \quad f(x) = \lambda$
4) $\forall x \in I \quad \exists \lambda \in \mathbb{R} \quad f(x) = \lambda$

Exercice 7 $(\star)$**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Traduire avec des quantificateurs les assertions suivantes :

1) La fonction f est la fonction nulle.
2) La fonction f présente un minimum.
3) La fonction f n'est pas constante.
4) La fonction f n'est pas majorée (elle prend des valeurs arbitrairement grandes sur I).

Exercice 8. Est-ce que les assertions suivantes sont vraies ?

- $P : (\exists x \in \mathbb{R} \quad x+1=0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R} \quad x-2=0)$
- $P' : \exists x \in \mathbb{R} \quad (x+1=0)$ et $(x-2=0)$
- $Q : \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \neq 0$ ou $x \neq 1)$
- $Q' : (\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 0)$ ou $(\forall x \in \mathbb{R} \quad x \neq 1)$

Raisonnements classiques

Exercice 9. Soit x un réel (quelconque). Démontrer l'assertion

$$x=0 \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |x| < \varepsilon$$

Exercice 10. On considère 3 réels x_1, x_2, x_3 tels que

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 1$$

Montrer qu'on a $x_2 - x_1 \leq \frac{1}{2}$ ou $x_3 - x_2 \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 11. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{n(n^2+1)}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 12. Soit a, b deux réels. Montrer que si l'équation $ax+b=0$ admet une infinité de solutions, alors $a=0$.

Exercice 13. 1) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, l'entier $7^n - 4^n$ est un multiple de 3.

2) On considère la propriété P_n : $8^n + 2$ est multiple de 7. Montrer qu'elle est héréditaire, c'est-à-dire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad P_n \implies P_{n+1}$. Est-ce que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$?

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.

Exercice 15. Montrer par récurrence forte que tout entier $n \geq 1$ peut s'écrire de façon unique sous la forme $2^p m$ avec $p \in \mathbb{N}$ et m un entier naturel impair.

Exercice 16 ($\star\star$)**.** Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites passant par deux de ces points et on en compte 2024 distinctes. Justifiez que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 17. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall y \in \mathbb{R} \qquad f(x-y) = x - f(y)$$

Indication : déterminer $f(0)$.

Exercice 18. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

Indication : déterminer $f(0)$.