DM n°7 : Matrices toutes-puissantes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **toute-puissante sur** $\mathbb{K}$, si pour toute (puissance) $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A = B^p$. On notera $\mathrm{TP}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toutes-puissantes.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. Montrer cependant que $A \in \mathrm{TP}_2(\mathbb{C})$.

2) Soit $A \in \mathrm{TP}_n(\mathbb{K})$ et A' une matrice semblable à A. Montrer que A' est également toute-puissante, i.e. montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice $B' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A' = (B')^p$.

3) Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ défini par $u(x,y,z) = (2x - z, -x + 3y + z, z)$.
   (a) Donner la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u)$ où $\mathcal{B}_c$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) On considère la base de $\mathbb{R}^3$ suivante : $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ en utilisant des matrices de passages.
   (c) En déduire que A est toute-puissante sur $\mathbb{R}$.

4) On dit qu'une matrice N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est <u>nilpotente</u> s'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ tel que N^r est la matrice nulle. Le but de cette question est de montrer que si $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente (et de taille n) alors N^n est la matrice nulle. **Toute cette question est facultative**, vous pouvez traiter la question 5) du DM en admettant ce résultat.

   Soit donc N une matrice nilpotente et $r \in \mathbb{N}^*$ tel que N^r est nulle. Soit enfin $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ un morphisme quelconque.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Ker}\,(f^k) \subset \mathrm{Ker}\,(f^{k+1})$.
   (b) Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Ker}\,(f^m) = \mathrm{Ker}\,(f^{m+1})$. On pourra raisonner par l'absurde et invoquer un argument de dimension. Dans la suite, on notera k_0 le plus petit entier m qui vérifie cette propriété.
   (c) Montrer que pour tout entier $\ell \geq k_0$, $\mathrm{Ker}\,(f^\ell) = \mathrm{Ker}\,(f^{k_0})$.
   (d) En déduire que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ définie par
   $$u_k = \dim \mathrm{Ker}\,(f^k)$$
   vérifie $u_1 < u_2 < \ldots < u_{k_0}$ puis $u_{k_0} = u_{k_0+1} = u_{k_0+2} = \ldots$.
   (e) En déduire que $k_0 \leq n$.
   (f) Dans la suite du sujet, on suppose que f est le morphisme canoniquement associé à N. Justifier que $f^r := \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{r \text{ fois}}$ est le morphisme nul. Que vaut $\mathrm{Ker}\, f^r$?
   (g) En déduire que f^n est nul, puis que N^n est nulle.

5) Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente et toute-puissante, alors A est la matrice nulle.