Programme de colle n°27

semaine du 12 au 16 mai

Notions vues en cours

Chapitre 33 : Théorie de l'intégration

- Subdivision $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ d'un intervalle $[a, b]$, pas et support d'une subdivision (noté $\text{Supp}(\sigma) = \{x_0, \cdots, x_n\}$), σ' est plus fine que σ si $\text{Supp}(\sigma) \subset \text{Supp}(\sigma')$, ce qu'on notera $\sigma \subset \sigma'$
- Réunion de deux subdivisions σ et σ', notée $\sigma \cup \sigma'$, cette réunion est plus fine que σ et que σ'
- Fonction en escalier sur $[a, b]$, subdivision adaptée à f, toute subdivision plus fine est encore adaptée, l'ensemble des fonctions en escalier $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, toute fonction en escalier est bornée
- Intégrale d'une fonction en escalier, notation $\displaystyle\int_{[a,b]} f$, généralisation sans supposer $a < b$ avec la notation $\displaystyle\int_a^b f$
- Fonction réelle continue par morceaux, subdivision adaptée à f, toute subdivision plus fine est encore adaptée, l'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-e.v. et un sous-anneau de $\mathbb{R}^{[a,b]}$, toute fonction continue par morceaux est bornée
- Toute fonction continue par morceaux peut être "approchée" aussi près qu'on veut par une fonction en escalier, intégrale d'une fonction continue par morceaux
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles, inégalité triangulaire, toute fonction continue et positive d'intégrale nulle est égale à la fonction nulle
- Fonction complexe continue par morceaux, ensemble $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{C})$, intégrale d'une fonction complexe, formules $\displaystyle\int \text{Re} f = \text{Re} \int f$ et $\displaystyle\int \text{Im} f = \text{Im} \int f$
- Vu en exercice : calcul de limites d'intégrales à paramètre par encadrement / majorations / minorations
- Corollaire du TFA : dérivation de $x \mapsto \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$
- Somme de Riemann associée à une fonction f : définition, convergence
- Formule de Taylor avec reste intégral, inégalité de Taylor-Lagrange
- Continuité uniforme : définition, interprétation géométrique, théorème de Heine
- Propriété f lipschitzienne $\implies$ f uniformément continue $\implies$ f continue

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, lemme, théorème, corollaire, SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **30 à 32**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Corollaire du Théorème Fondamental de l'Analyse Chapitre 33, Corollaire 33.20
2. Formule de Taylor avec reste intégral Chapitre 33, Théorème 33.24
3. Inégalité de Taylor-Lagrange Chapitre 33, Théorème 33.25

Exemples de questions libres :

Chapitre 30 :

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F, G, compléter la formule suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v) \times \mathrm{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(u)$$

- Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Entre les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$, laquelle est la plus facile à calculer ? Donner cette matrice sans justification.
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?

Chapitre 31 :

- Qu'appelle-t-on une permutation d'un ensemble E ?
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ un élément de S_5. Compléter : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un cycle. Donner la formule qui décompose ce cycle en produit de transpositions.
- Compléter ce théorème : toute permutation peut se décomposer en un produit de cycles .... Cette décomposition est-elle unique ?
- Soit $\sigma \in S_n$. À quelle condition est-ce que σ est une permutation impaire ? Que vaut alors sa signature ?

Chapitre 32 :

- Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. Que signifie l'assertion "f est alternée" ?
- Développer le déterminant suivant selon la seconde ligne : $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$. On écrira bien chaque terme du développement sans simplification supplémentaire, et on ne demande pas de terminer le calcul.
- Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Compléter les formules : $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) =$ .... et $\det f =$ .... (on attend des expressions qui dépendent de $\mathcal{B}$).
- Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Existe-t-il des formules pour le déterminant de $A + B$, de λA et de AB ? Si oui, les donner.
- Donner la formule qui fait intervenir une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et sa comatrice $\mathrm{Com}(A)$.