Programme de colle n°26

semaine du 5 au 9 mai

Notions vues en cours

Chapitre 32 : Déterminants *(suite de la semaine précédente)*

- Déterminant d'une famille de vecteurs $(u_1, \cdots, u_n)$ dans une base $\mathcal{B}$, notation $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$
- Formules $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = 1$, caractérisation d'une base par le déterminant (en dimension finie)
- Déterminant d'une matrice carrée, formules pour les déterminant de taille 3 ou moins (règle de Sarrus)
- $\det(A^\top) = \det A$, le déterminant est une forme n-linéaire alternée (donc antisymétrique) en les colonnes / les lignes de la matrice et conséquences directes (si les colonnes / lignes forment une famille liée, le déterminant est nul, etc.)
- Opérations élémentaires sur le déterminant : les permutations changent de signe, les dilatations font apparaitre un facteur hors du déterminant
- Mineur (noté Δ_{ij}), cofacteur, développement selon une ligne / colonne, déterminant d'une matrice triangulaire
- Déterminant d'un endomorphisme : définition, notation $\det f$, formule $\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \det f \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, formules pour $\det(\lambda f)$, $\det(f \circ g)$, $\det(f^{-1})$, formules équivalentes pour les matrices
- Le déterminant d'un endomorphisme correspond à celui de sa matrice selon toute base, deux matrices semblabes ont le même déterminant
- Comatrice : définition, notation $\mathrm{Com}(A)$, formule $A\mathrm{Com}(A)^\top = \mathrm{Com}(A)^\top A = \det(A) I_n$, si A est inversible, expression de A^{-1} en fonction de $\mathrm{Com}(A)$
- Avec $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution ssi $B \in \mathrm{Im}\,(A)$, il y a unicité (sans forcément existence) ssi $\mathrm{Ker}\,(A) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$
- Système de Cramer ($A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et A est inversible), existence et unicité de la solution d'un système de Cramer, la solution est $X = A^{-1}B$, formules de Cramer
- Sous-matrice de taille r d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, mineur de taille r, le rang de A vaut r ssi il existe au moins un mineur de taille r non nul et si tous les mineurs de taille $r + 1$ sont nuls.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, lemme, théorème, corollaire, SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **29 à 31**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : exprimer $\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n)$ en fonction de $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$, puis donner une formule qui relie $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ et $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$. Avec démonstration : caractérisations du fait que $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E en fonction du déterminant. Chapitre 32, Théorème 32.15 et Corollaires 32.16 et 32.17
2. Sans démonstration : énoncer le théorème qui définit le déterminant d'un endormorphisme f. Avec démonstration : que vaut $\det(f \circ g)$? Montrer que f est inversible ssi $\det f \neq 0$ et déterminer $\det(f^{-1})$ le cas échéant. Chapitre 32, Théorème 32.27 et Théorème 32.28 (deux dernières assertions)
3. Définition du mineur d'indice (i, j) d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, du cofacteur d'indice (i, j), définition de la comatrice, puis sans démonstration : donner une formule reliant A et $\mathrm{Com}(A)$, ainsi qu'une autre formule reliant A^{-1} (si A est inversible) et $\mathrm{Com}(A)$. Appliquer cette formule à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en supposant $ad - bc \neq 0$ Chapitre 32, Définitions 32.25, 32.32 et Théorème 32.33

Exemples de questions libres :

Chapitre 29 :

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(x)$ pour $x \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p.
- Compléter ces phrases : "Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ..." et "Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ..."
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Que signifie l'assertion "f est une forme linéaire sur E" ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Donner une caractérisation de l'assertion "H est un hyperplan" qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 30 :

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $v \in \mathcal{L}(F, G)$ et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F, G, compléter la formule suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\dots\dots}{}^{\dots\dots}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\dots\dots}{}^{\dots\dots}(v) \times \mathrm{Mat}_{\dots\dots}{}^{\dots\dots}(u)$$

- Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Entre les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$, laquelle est la plus facile à calculer ? Donner cette matrice sans justification.
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?

Chapitre 31 :

- Qu'appelle-t-on une permutation d'un ensemble E ?
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ un élément de S_5. Compléter : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & & & & \end{pmatrix}$
- Soit $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$ un cycle. Donner la formule qui décompose ce cycle en produit de transpositions.
- Compléter ce théorème : toute permutation peut se décomposer en un produit de cycles .... Cette décomposition est-elle unique ?
- Soit $\sigma \in S_n$. À quelle condition est-ce que σ est une permutation impaire ? Que vaut alors sa signature ?