Programme de colle n°25

semaine du 28 avril au 2 mai

Notions vues en cours

Les exercices pourront également porter sur le chapitre 30 (Matrices et applications linéaires).

Chapitre 31 : Groupe symétrique

- Permutation d'un ensemble E, ensemble $S(E)$, c'est un groupe pour la loi $\circ$
- Groupe symétrique $S_n = S(\llbracket 1, n \rrbracket)$, non abélien si $n \geq 3$, S_n possède $n!$ éléments, point fixe d'une permutation
- Notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, notation multiplicative $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$, σ^{-1} est l'inverse de σ
- p-cycle, notation $\sigma = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_p \end{pmatrix}$, $\sigma^p = \mathrm{id}$, support d'un cycle, deux cycles à supports disjoints commutent, transposition
- Toute permutation peut se décomposer en un produit (éventuellement vide pour l'identité) de cycles à supports disjoints, de manière unique à l'ordre près, orbite d'une permutation, méthode pratique de la décomposition
- Décomposition d'un cycle (et par suite d'une permutation) en produit de transpositions, cette écriture n'est pas unique mais la parité du nombre de transpositions est unique, permutation paire / impaire
- Signature d'une permutation, notation $\varepsilon(\sigma)$, c'est un morphisme de groupes de $(S_n, \circ)$ dans $(\{-1, 1\}, \times)$, lien avec la parité d'une permutation, la signature d'une transposition vaut -1, celle d'un p-cycle est $(-1)^{p-1}$

Chapitre 32 : Déterminants

- Application / forme bilinéaire, application symétrique, application / forme n-linéaire : définition, exemples
- Forme n-linéaire alternée : définition, s'annule quand on l'évalue en une famille liée, est inchangée quand on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres
- Forme n-linéaire antisymétrique : définition, formule $f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$, une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique
- Pour une forme n-linéaire alternée avec une base $(e_1, \cdots, e_n)$ de l'espace de départ : expression de $f(u_1, \cdots, u_n)$; f est entièrement déterminée par $f(e_1, \cdots, e_n)$; si E est de dimension n, l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un e.v. de dimension 1

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **28 à 30**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définitions de permutation paire et impaire, de la signature d'une permutation, que peut-on dire de $\varepsilon(\sigma\sigma')$ (sans démonstration) ? Si σ est un p-cycle, quelle est sa signature (avec démonstration) ? Chapitre 31, Définitions 31.15 et 31.16, Corollaire 31.18 et Théorème 31.19
2. Définition d'une forme n-linéaire alternée, que peut-on dire si elle est évaluée en une famille liée ? montrer que si f est alternée, $f(u_1, \cdots, u_n)$ ne change pas si on ajoute à un vecteur une combinaison linéaire des autres Chapitre 32, Définition 32.6, Théorème 32.7
3. Définition d'une forme n-linéaire alternée, d'une forme n-linéaire antisymétrique. montrer que toute forme n-linéaire alternée est antisymétrique Chapitre 32, Définitions 32.6 et 32.8, Théorème 32.10 (un seul sens)
4. Définition d'une forme n-linéaire alternée, d'une forme n-linéaire antisymétrique. montrer que toute forme n-linéaire antisymétrique est alternée Chapitre 32, Définitions 32.6 et 32.8, Théorème 32.10 (un seul sens)

Exemples de questions libres :

Chapitre 28 :

- Que doit vérifier $f : E \to F$ pour être une application linéaire ?
- Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Donner les définitions ensemblistes de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $e_1, \cdots, e_n$ des vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Quelle est la définition de $\operatorname{rg}(e_1, \cdots, e_n)$? de $\operatorname{rg} u$?
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 29 :

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(x)$ pour $x \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p.
- Compléter ces phrases : “Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ...” et “Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ...”
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Que signifie l’assertion “f est une forme linéaire sur E” ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Donner une caractérisation de l’assertion “H est un hyperplan” qui fasse intervenir un supplémentaire.

Chapitre 30 :

- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, $v \in \mathcal{L}(F,G)$ et $\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F, \mathcal{B}_G$ des bases de E, F, G, compléter la formule suivante :

$$\operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v \circ u) = \operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(v) \times \operatorname{Mat}_{\dots\dots}^{\dots\dots}(u)$$

- Soit $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ une base de $\mathbb{R}^2$, et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Entre les deux matrices de passages $P_{\mathcal{B}_c}{}^{\mathcal{B}}$ et $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}_c}$, laquelle est la plus facile à calculer ? Donner cette matrice sans justification.
- Donner la définition de matrices équivalentes, en faisant attention à la taille des matrices.
- Donner la définition de matrices semblables.
- Si deux matrices sont équivalentes, que peut-on dire de leurs rangs ? Est-ce une équivalence ?