Programme de colle n°24

semaine du 21 au 25 avril

Notions vues en cours

Chapitre 29 : Applications linéaires (partie B) *en complément de la semaine précédente*

- Forme linéaire, espace dual noté E^*, forme linéaire e_i^* associée au i-ème vecteur de la base $(e_1, \cdots, e_n)$, base duale d'une base de E, si E est de dimension finie, E^* aussi et $\dim E^* = \dim E$
- Hyperplan (vectoriel) H de E : définition comme noyau d'une forme linéaire non nulle, H est un hyperplan ssi H admet une droite vectorielle comme supplémentaire ssi $\dim H = \dim E - 1$ (si E est de dimension finie)
- Deux hyperplans coïncident ssi leurs formes linéaires associées non nulles sont colinéaires, équation d'un hyperplan (en dimension infinie ou finie)
- L'intersection de m hyperplans est de dimension $\geq \dim E - m$, et tout espace de dimension exactement $\dim E - m$ peut s'écrire comme l'intersection de m hyperplans

Chapitre 30 : Matrices et applications linéaires

- Matrice d'un vecteur x (ou d'une famille de vecteurs $(c_1, \cdots, c_m)$) selon une base, notations $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(c_1, \cdots, c_m)$
- Matrice d'une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ selon des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$, notation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$, pour un endomorphisme de E, on prendra les mêmes bases au départ et à l'arrivée et la matrice sera seulement notée $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$
- L'application $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est un isomorphisme d'e.v. Expressions des matrices de $u(x)$, de $\alpha u + \beta v$, de $v \circ u$, de u^{-1}, notamment u est inversible ssi il existe $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ telles que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible ssi pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}{}^{\mathcal{B}_E}(u)$ est inversible
- Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible ssi son noyau vaut $\{0\}$ ssi son image est $\mathbb{K}^n$ ssi son rang est n
- Matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ notée $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'} := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E)$, le coefficient d'indice (i, j) de $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est la i-ième coordonnée dans la base $\mathcal{B}$ du j-ième vecteur de la base $\mathcal{B}'$
- $P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathcal{B}}{}^{\mathcal{B}'}) = P_{\mathcal{B}'}{}^{\mathcal{B}}$, formules de changement de base pour un vecteur, pour un morphisme ; cas particulier d'un endomorphisme
- Morphisme canoniquement associé à une matrice, noyau / image / rang d'une matrice, notations $\mathrm{Ker}\, A$, $\mathrm{Im}\, A$ et $\mathrm{rg}\, A$ et caractérisations pour déterminer rapidement $\mathrm{Ker}\, A$ et $\mathrm{Im}\, A$ sans passer par le morphisme
- Matrices de dilation / permutation / transvection, notations $D_i(\mu)$ / $P_{i,j}$ / $T_{i,j}(\lambda)$, inverses de ces matrices, faire une opération élémentaire sur les lignes (resp. colonnes) d'une matrice revient à multiplier à gauche (resp. à droite) par la matrice correspondante à cette opération élémentaire
- Matrices équivalentes : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, les opérations élémentaires préservent le rang
- Matrice J_r : définition, son rang est r ; Toute matrice A est équivalente à une (et une seule) matrice J_r avec $r = \mathrm{rg} A$, tout morphisme admet une matrice de la forme J_r pour matrice dans des bases bien choisies
- Deux matrices (de même taille) sont équivalentes ssi elles ont le même rang
- Le rang d'une matrice est égal au nombre de pivots sous forme échelonnée, ou encore à la dimension du s.e.v. engendré par ses colonnes (ou encore par ses lignes), $\mathrm{rg}\, A^\top = \mathrm{rg}\, A$
- Matrices semblables : définition, c'est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, deux matrices semblables sont équivalentes mais la réciproque est fausse
- Trace d'une matrice : définition, notation $\mathrm{Tr}\, A$, c'est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, lorsque cela a un sens : $\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$, deux matrices semblables ont même trace
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, la quantité $\mathrm{Tr}\,(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u))$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie et est notée $\mathrm{Tr}\, u$ (trace de l'endomorphisme u), la trace d'un projecteur est égale à son rang

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **27 à 29**. *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition d'une forme linéaire, dimension de E^*, définition de la forme linéaire e_i^*, et preuve que $(e_1^*, \cdots, e_n^*)$ est une base de E^* Chapitre 29, Encadrés 29.11 à 29.14
2. Définition d'une matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ à une base $\mathcal{B}'$. Inversibilité de la matrice de passage. Enfin, sans démonstration : formule de changement de base pour un vecteur, un morphisme et pour un endomorphisme Chapitre 30, Encadrés 30.9 à 30.13
3. Trace d'une matrice : définition, que peut-on dire de la trace d'une combinaison linéaire de matrices (sans démonstration) ? d'un produit de deux matrices (avec démonstration) ? Si A et B sont semblables, que peut-on dire de leur trace (avec démonstration) ? Chapitre 30, Encadrés 30.35 à 30.38

Exemples de questions libres :

Chapitre 27 :

- Donner la base canonique de l'e.v. $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice ?
- Soit E un e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base pour être dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 28 :

- Que doit vérifier $f : E \to F$ pour être une application linéaire ?
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions ensemblistes de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $e_1, \cdots, e_n$ des vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\operatorname{rg}(e_1, \cdots, e_n)$? de $\operatorname{rg} u$?
- Énoncer le théorème du rang.

Chapitre 29 :

- Soit p un projecteur sur un s.e.v. F parallèlement à un s.e.v. G. Que doivent vérifier F et G pour que cela ait un sens ? Que vaut alors $p(x)$ pour $x \in E$?
- Soit p un projecteur sur F parallèlement à G. Donner deux expressions de F et une expression de G qui font intervenir p.
- Compléter ces phrases : "Soit $s \in \mathcal{L}(E)$. Alors s est une symétrie ssi ..." et "Soit $p \in \mathcal{L}(E)$. Alors p est un projecteur ssi ..."
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Que signifie l'assertion "f est une forme linéaire sur E" ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Donner une caractérisation de l'assertion "H est un hyperplan" qui fasse intervenir un supplémentaire.