Programme de colle n°23

semaine du 31 mars au 4 avril

Notions vues en cours

Chapitre 28 : Applications linéaires (partie A) *en complément de la semaine précédente*

- Caractérisations de l'injectivité et/ou de la surjectivité selon le caractère libre et/ou générateur de l'image d'une base
- Lorsque les espaces de départ et d'arrivée sont de même dimension (finie) : équivalence entre injectivité / surjectivité / bijectivité / inversibilité à droite / inversibilité à gauche
- Définition de "E et F sont isomorphes", notation $E \simeq F$, si E est de dimension finie, alors $E \simeq F$ si et seulement si F a même dimension que E, dimension de $\mathcal{L}(E,F)$
- Rang d'une famille de vecteurs, rang d'une application linéaire, si E (resp. F) est de dimension finie, alors tout $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est de rang fini avec $\operatorname{rg} u \leq \dim E$ (resp. $\operatorname{rg} u \leq \dim F$), avec égalité ssi u est injectif (resp. u est surjectif).
- Composer un morphisme à gauche ou à droite par un isomorphisme conserve le rang (s'il existe), formule $\operatorname{rg}(v \circ u) \leq \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$
- Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, le morphisme v obtenu par restriction de u à un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ et co-restriction à $\operatorname{Im} u$ est un isomorphisme, théorème du rang

Chapitre 29 : Applications linéaires (partie B)

- L'application $\lambda \mathrm{id}_E$ est appelée homothétie de rapport λ, elle est inversible si et seulement si $\lambda \neq 0$ et son inverse est $\dfrac{1}{\lambda}\mathrm{id}_E$
- Projecteur sur F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, propriétés $F = \operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker} p$, tout projecteur est un projecteur sur $\operatorname{Im} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$
- $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur ssi $p^2 = p$
- Symétrie par rapport à F parallèlement à G (avec $F \oplus G = E$) : définition, interprétation géométrique, linéarité, propriétés $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ et $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$, toute symétrie est une symétrie par rapport à $\operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$
- $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie ssi $s^2 = \mathrm{id}_E$, en particulier s est inversible et $s^{-1} = s$

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **26 à 28**. *Des exemples de questions figurent en page suivante*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition du rang d'une application linéaire. Étant donné $u \in \mathcal{L}(E,F)$, et S un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, montrer que $u\big|_S$ est un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Énoncer (sans démonstration) le théorème du rang. Chapitre 28, Définition 28.29, Lemme 28.33 et Théorème 28.34
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Montrer que p est linéaire, et exprimer F et G en fonction de p. Chapitre 29, Théorème 29.3
3. Caractérisation d'un projecteur : pour le sens réciproque, on montrera seulement que $\operatorname{Ker} p \oplus \operatorname{Im} p = E$ sans montrer que p est bien un projecteur Chapitre 29, Théorème 29.5

Exemples de questions libres :

Chapitre 26 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Donner une caractérisation de "F est un s.e.v. de E"
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E".
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille libre". Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit F et G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?

Chapitre 27 :

- Donner la base canonique de l'e.v. $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Quelle est sa dimension ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice ?
- Soit E un e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base pour être dite adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.

Chapitre 28 :

- Que doit vérifier $f : E \to F$ pour être une application linéaire ?
- Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Donner les définitions ensemblistes de $\text{Ker}\, f$ et de $\text{Im}\, f$.
- Soit $u : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ une application linéaire qui vérifie $u(1) = 3X$, $u(X) = 4X^2$ et $u(X^2) = 5$. Pourquoi est-ce que cela suffit à déterminer complètement u ? Exprimer $u(P)$ pour un polynôme quelconque $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $e_1, \cdots, e_n$ des vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Quelle est la définition de $\text{rg}\,(e_1, \cdots, e_n)$? de $\text{rg}\, u$?
- Énoncer le théorème du rang.