Programme de colle n°22

semaine du 24 au 28 mars

Notions vues en cours

Chapitre 27 : Dimension d'un espace vectoriel (suite)

- Si F est un s.e.v. de E alors $\dim F \leq \dim E$, avec cas d'égalité
- Base adaptée à une décomposition $E = F \oplus G$, concaténer une base de F avec une base de G donne une base de E (adaptée à $E = F \oplus G$)
- Fragmenter une base en deux sous-familles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ entraine que $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et $\mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ sont supplémentaires ; tout s.e.v. admet un supplémentaire
- Dimension de $F \oplus G$, formule de Grassman, caractérisations que deux s.e.v. soient supplémentaires
- E est de dimension infinie ssi E possède une famille libre avec une infinité d'éléments, ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'ensemble E possède une famille libre à n éléments

Chapitre 28 : Applications linéaires (partie A)

- Application linéaire (ou morphisme d'e.v.) : définition, ensemble $\mathcal{L}(E, F)$, propriétés simples ($f(0_E) = 0_F$, etc.), endo- / iso- / automorphisme
- Exemples classiques d'applications linéaires : dérivation, intégration, évaluation en un point, transposée de matrice, limite d'une suite ou d'une fonction, ...
- La combinaison linéaire / la composition / l'inverse d'application(s) linéaire(s) est une application linéaire, $\mathcal{L}(E, F)$ est un s.e.v. de F^E, bilinéarité de la composition d'applications linéaires
- L'image directe et l'image réciproque d'un s.e.v. par une application linéaire sont des s.e.v., noyau et image d'un morphisme, notations $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$, caractérisations de l'injectivité, de la surjectivité en fonction de $\mathrm{Ker}\, u$ et $\mathrm{Im}\, u$
- Image d'une famille de vecteurs $\mathcal{F}$ par une application linéaire u, notation $u(\mathcal{F})$, propriété que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(u(\mathcal{B}))$ avec $\mathcal{B}$ une base de l'ensemble de départ
- $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$ est un anneau, notation multiplicative u^n, groupe linéaire $GL(E)$, formules du binôme et $u^n - v^n$ dans l'anneau $\mathcal{L}(E)$
- Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des éléments d'une base, par ses restrictions sur deux s.e.v. supplémentaires

Le théorème du rang est hors-programme cette semaine. Il faut savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire (sous forme de Vect et/ou d'équations sur les coordonnées des vecteurs), et en donner une base.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **26 et 27**. *Des exemples de questions figurent en page suivante*

Les questions de cours fixées se trouvent en page suivante

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : formule de Grassman. Avec démonstration : donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$ Chapitre 27, Théorèmes 27.17 et 27.18
2. Définition d'application linéaire, montrer que la combinaison linéaire de deux applications linéaires est une application linéaire, puis oralement : que doit vérifier une application linéaire pour être qualifiée d'endo / iso / automorphisme d'e.v. ? Chapitre 28, Théorèmes 28.1 et 28.4, Définition 28.3
3. L'image directe d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\operatorname{Im} f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de la surjectivité en fonction de $\operatorname{Im} f$ Chapitre 28, Théorèmes 28.9 (assertion 1), Définition 28.11 et Théorème 28.12
4. L'image réciproque d'un s.e.v. est un s.e.v., définition de $\operatorname{Ker} f$. Pourquoi est-ce un s.e.v. ? Sans démonstration : caractérisation de l'injectivité en fonction de $\operatorname{Ker} f$ Chapitre 28, Théorèmes 28.9 (assertion 2), Théorème 28.10 et le rappel au-dessus

Exemples de questions libres :

Chapitre 26 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Donner une caractérisation de "F est un s.e.v. de E"
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\operatorname{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E".
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille libre". Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit F et G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?

Chapitre 27 :

- Donner la base canonique de l'e.v. $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$. Quelle est la dimension de cet e.v. ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille libre ?
- Si E est un e.v. de dimension n, que peut-on dire sur le cardinal d'une famille génératrice ?
- Soit E un e.v. de dimension finie et F un s.e.v. de E. Que peut-on dire sur les dimensions de F et de E ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Que doit vérifier une base pour être une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$? Comment obtenir une telle base ?
- Soit E un e.v. et F, G deux s.e.v. de E. Donner 3 caractérisations de $F \oplus G = E$.