Programme de colle n°21

semaine du 17 au 21 mars

Notions vues en cours

Chapitre 26 : Espaces vectoriels (suite)

- Sous-espace engendré par une partie X : définition, notation vect(X), c'est le plus petit s.e.v. qui contient X, si $A \subset B$ alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$, $\text{Vect}(X) = X$ ssi X est un s.e.v., Vect(X) est l'ensemble des CL (*combinaisons linéaires*) des vecteurs de X (avec un nombre fini de vecteurs)
- Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs noté $\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$; $\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$ est l'ensemble des CL de $u_1, \cdots, u_n$; si v est une CL de $u_1, \cdots, u_n$ alors $\text{Vect}(u_1, \cdots, u_n, v) = \text{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$; famille génératrice (finie)
- Famille libre (finie), famille liée (finie), vecteurs colinéaires, caractérisation du caractère libre (ou liée) d'une famille de 1 ou 2 vecteurs, une famille de n vecteurs est liée ssi un vecteur est CL des autres
- Si une famille contient 0_E, elle est liée, si une famille contient plusieurs fois le même vecteur, elle est liée
- Si on ajoute un vecteur à une famille liée (resp. génératrice), cette famille reste liée (resp. génératrice), si on enlève un vecteur à une famille libre, cette famille reste libre
- Base : définition, $(e_1, \cdots, e_n)$ est une base ssi tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme une CL Des vecteurs $e_1, \cdots, e_n$, bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et de $\mathbb{K}_n[X]$
- Somme de deux s.e.v. : définition, c'est un s.e.v., $F + G = \text{Vect}(F \cup G)$, quelques propriétés simples de la somme ($F + F = F$, etc.)
- Somme directe de deux s.e.v. : définition, notation $F \oplus G$, cela équivaut à $F \cap G = \{0_E\}$
- S.e.v. supplémentaires dans un e.v. : définition, caractérisations
- Famille $(\lambda_i)_{i \in I}$ presque nulle, notation $\mathbb{K}^{(I)}$, support
- Extension des notions vues pour des familles finies à des familles possiblement infinies $(e_i)_{i \in I}$: CL, s.e.v. engendré par les $(e_i)_{i \in I}$, famille génératrice, famille libre, base (tout ceci principalement avec $I = \mathbb{N}$)
- Vu en TD : méthode pour transformer un s.e.v. sous la forme d'une équation (par ex $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et le mettre sous la forme d'un Vect et réciproquement

Chapitre 27 : Dimension d'un espace vectoriel

- Cardinal d'une famille, e.v. de dimension finie, e.v. de dimension infinie
- Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite, tout e.v. admet des bases, le cardinal d'une famille libre est inférieur à celui d'une famille génératrice
- Définition de la dimension d'un e.v. (de dimension finie) comme cardinal d'une base, notation $\dim E$, bases canoniques et dimensions d'e.v. classiques : $\{0_E\}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$, Si $\dim E = n$, une famille libre / génératrice de E admet au plus / au moins n éléments, et si elle a exactement n éléments, c'est une base

Les arguments sur la dimension doivent se limiter aux familles libres, génératrices et bases. En particulier, sont hors-programme la formule de Grassman, les caractérisations de $F \oplus G = E$ en fonction de la dimension, etc.

Les questions de cours sont sur la page suivante.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **23 et 26**. *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Sans démonstration : caractérisation de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, définitions de "$(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice / libre / liée / une base Chapitre 25, Théorème 26.19, Définitions 26.20, 26.21, 26.22, 26.29
   Inutile de réécrire chaque encadré en entier : la partie "mathématique" suffit. Par exemple $(e_1, \cdots, e_n)$ est une famille génératrice de E si $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$.

2. La somme de deux s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 26, Théorème 26.31

3. Définition de "F et G sont en somme directe" et preuve d'une caractérisation. Chapitre 26, Définition 26.33 et Théorème 26.34

Exemples de questions libres :

Chapitre 23 :

- Soit $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Que vaut la somme des racines de P (comptées avec multiplicité) ? et leur produit ?
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit $\dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\dfrac{A}{B}$?

Chapitre 26 :

- Compléter la définition suivante : $(E, +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-e.v. si $(E, +)$ est un groupe abélien et si les assertions suivantes sont vérifiées : ...
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $F \subset E$. Donner une caractérisation de "F est un s.e.v. de E"
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition en termes d'ensemble de $\mathrm{Vect}(u_1, \cdots, u_n)$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille génératrice de E".
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. et $u_1, \cdots, u_n \in E$. Donner la définition de "$(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille libre". Comment appelle-t-on une famille qui n'est pas libre ?
- Soit E un $\mathbb{K}$-e.v. Soit F et G deux s.e.v. de E. Si on a $u \in F \oplus G$, que peut-on en déduire sur u ?