Programme de colle n°20

semaine du 10 au 14 mars

Notions vues en cours

Chapitre 25 : Développements limités *(en complément de la semaine précédente)*

- Équivalence entre $\mathrm{DL}_0(a)$ et continuité (quitte à prolonger par continuité en a). Équivalence entre $\mathrm{DL}_1(a)$ et dérivabilité (si la fonction est définie en a)
- Intégration de DL
- Obtention d'équivalents à partir d'un DL avec un premier terme non nul (forme dite normalisée), calcul de limites en utilisant les DL
- Avec un DL, étude du signe local d'une fonction (notamment de $f(x)-f(a)$ pour vérifier si a est un extremum local), obtention de l'équation d'une tangente et position relative de la courbe par rapport à sa tangente
- Conditions d'optimalité du second ordre : conditions nécessaires, conditions suffisantes
- Échelle de comparaison, développement asymptotique,
- Asymptote oblique en $\pm\infty$: définition, méthode de détermination
- (Vu en exercice :) développement asymptotique d'une suite implicite

Chapitre 26 : Espaces vectoriels

- $\mathbb{K}$-espace vectoriel : définition, le vecteur nul est noté 0_E, règles de calcul avec $0_{\mathbb{K}}, 0_E$, le signe $-$
- Espace vectoriel produit $E_1 \times \cdots \times E_n$, e.v. usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$, $\mathcal{C}^n(I,\mathbb{K})$ avec $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}(X)$, $\mathbb{K}^{\Omega}$ avec Ω un ensemble quelconque
- Combinaison linéaire d'une famille *finie* de vecteurs (les CL de familles infinies seront vues ultérieurement)
- Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation, s.e.v. triviaux, stabilité par intersection (finie ou infinie)

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **22 et 23**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Conditions d'optimalité du second ordre : énoncé uniquement Chapitre 24, Théorème 25.18
2. Définition d'un espace vectoriel, puis sans démonstration : une caractérisation pour qu'un ensemble soit un s.e.v. (on ne demande pas la définition d'un s.e.v.) Chapitre 26, Définition 26.2 et Théorème 26.9 (ou 26.10)
3. L'intersection d'une famille (finie ou infinie) de s.e.v. est un s.e.v. Chapitre 25, Théorème 26.11

Exemples de questions libres :

Chapitre 22 :

- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quelles sont les trois conditions que doit vérifier un polynôme D pour être le PGCD de A et de B ?
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(10)}(\alpha) = 0$, que peut-on dire sur la multiplicité de α ? Est-ce qu'il y a d'autres caractérisations équivalentes de cela ?

Chapitre 23 :

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Que vaut la somme des racines de P (comptées avec multiplicité) ? et leur produit ?
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$?