Programme de colle n°19

semaine du 3 au 7 mars

Notions vues en cours

Chapitre 24 : Relations de comparaison

- Fonction dominée / négligeable / équivalente à une autre fonction au voisinage d'un point (fini ou infini), notations $f(x) = \underset{x\to a}{O}(g(x))$ ou $f = \underset{a}{O}(g)$ / $f(x) = \underset{x\to a}{o}(g(x))$ ou $f = \underset{a}{o}(g)$ / $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$ — *Note : les définitions s'appuient uniquement sur le quotient f/g et son caractère borné au voisinage de a / sa limite en a*
- Négligeabilité entraine domination, si $\dfrac{f}{g}$ admet une limite finie en a alors $f = \underset{a}{O}(g)$, reformulation des croissances comparées
- Propriétés de o et O : transitivité, combinaison linéaire, produit, multiplication par une constante
- Si $\ell \in \mathbb{K}^*$, alors $f \underset{a}{\sim} \ell \iff \lim\limits_{a} f = \ell$, équivalents d'une fonction polynômiale en 0 et en $\pm\infty$
- Propriétés de $\underset{a}{\sim}$: c'est une relation d'équivalence, multiplication par $\lambda \in \mathbb{K}^*$, produit, quotient, puissance, on ne peut pas sommer les équivalents, $f + g \underset{a}{\sim} g$ ssi $f = \underset{a}{o}(g)$
- Si f est dérivable en a, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ équivalents classiques en 0.
- "Transitivité" du signe et des limites par équivalent, théorème d'encadrement version "équivalents"
- Composition à droite dans des petit-o, des grand-O et des équivalents. On ne peut pas composer à gauche
- Suite dominée / négligeable / équivalente à une autre suite, notations $u_n = O(v_n)$ / $u_n = o(v_n)$ / $u_n \sim v_n$
- Extension des résultats vus pour les fonctions, composition à droite par une suite dans un équivalent ($f \underset{a}{\sim} g$ et $u_n \to a$ entraine $f(u_n) \sim g(u_n)$)

Chapitre 25 : Développements limités

- Développement limité à l'ordre n en a, notation $\mathrm{DL}_n(a)$, partie régulière, reste d'un DL
- Interprétation du $\underset{x\to a}{o}(x-a)^n$ comme $(x-a)^n\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$, règles de calcul avec des petit-o compte tenu de cette interprétation, perte de la symétrie du signe $=$ si on modifie des petit-o
- Écriture alternative d'un $\mathrm{DL}_n(a)$ de f en se ramenant à un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $h \mapsto f(a+h)$
- Unicité du $\mathrm{DL}_n(a)$, lien entre $\mathrm{DL}_n(0)$ et parité de la fonction, troncature d'un DL
- Formule de Taylor-Young, formulaire des DL usuels (disponible en ligne)
- **Opérations et DL** : combinaison linéaire, produit, composition, inverse

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **21 à 23**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Pas de question fixée cette semaine. Hormis la question libre, la notation se fera uniquement sur les exercices. Il est recommandé de bien apprendre les formules des DL et des équivalents, ainsi que les différentes méthodes vues en classe.*

Exemples de questions libres :

Chapitre 21 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P+Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P

Chapitre 22 :

- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quelles sont les trois conditions que doit vérifier un polynôme D pour être le PGCD de A et de B ?
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(10)}(\alpha) = 0$, que peut-on dire sur la multiplicité de α ? Est-ce qu'il y a d'autres caractérisations équivalentes de cela ?

Chapitre 23 :

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Que vaut la somme des racines de P (comptées avec multiplicité) ? et leur produit ?
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On suppose que P admet une racine complexe non réelle α. Donner une autre racine de P. Que peut-on dire de plus ?
- Quels sont les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$?
- Soit $\frac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$. À quelle condition peut-on dire que cette fraction est irréductible ? Comment faire pour s'y ramener ?
- Quelle est la définition d'un pôle d'une fraction rationnelle $\frac{A}{B}$?