Programme de colle n°18

semaine du 24 au 28 février

Notions vues en cours

Chapitre 22 : Polynômes (Partie B) – suite et fin

- Racine d'un polynôme, $P(\alpha) = 0$ ssi $X - \alpha \mid P$, extension avec un nombre fini de racines distinctes, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines distinctes
- Multiplicité d'une racine, racine simple / multiple / double / triple, α est de multiplicité m ssi $(X-\alpha)^m \mid P$ et $(X-\alpha)^{m+1} \nmid P$ ssi $P = (X-\alpha)^m Q$ avec $Q(\alpha) \neq 0$ ssi $P(\alpha) = P'(\alpha) = \ldots = P^{(m-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(m)}(\alpha) \neq 0$, caractérisations similaires pour "α est de multiplicité au moins r"
- P admet pour racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ de multiplicités au moins $r_1, \cdots, r_p$ ssi $(X-\alpha_1)^{r_1} \cdots (X-\alpha_p)^{r_p} \mid P$, un polynôme non nul de $\mathbb{K}_n[X]$ admet au plus n racines comptées avec multiplicité

Chapitre 23 : Polynômes (Partie C) et fractions rationnelles

- Polynôme scindé, scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$: écriture $P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - \beta_k)$ avec $\beta_1, \cdots, \beta_n$ non nécessairement distincts, écriture $P = \lambda \prod_{k=1}^{r} (X - \alpha_k)^{m_k}$ avec $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ distincts et $m_1, \cdots, m_r$ les multiplicités ; $\lambda \in \mathbb{K}^*$ est le coefficient dominant
- Si P admet autant de racines comptées avec multiplicité que son degré, alors P est scindé, si P admet autant de racines distinctes que son degré, alors P est scindé à racines simples
- Relations coefficients-racines (ou formules de Viète)
- Polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$: définitions et quelques propriétés immédiates pour les reconnaitre
- Théorème de d'Alembert-Gauss (admis), description des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
- Si α est une racine d'un polynôme réel, alors $\overline{\alpha}$ l'est aussi avec même multiplicité, $A \wedge B = 1$ ssi A et B n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$
- Description des polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, décomposition en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
- Décomposition généralisée (les valuations de chaque polynôme irréductible peuvent valoir 0), obtention du PGCD et du PPCM de deux polynômes à partir des "valuations"
- Polynôme d'interpolation de Lagrange associés à des points d'abscisses distinctes
- Fraction rationnelle, ensemble $\mathbb{K}(X)$, c'est un corps pour $+$ et $\times$
- Une même fraction admet plusieurs écritures, fraction irréductible, on peut s'y ramener en divisant numérateur et dénominateur par leur PGCD, degré d'une fraction : c'est un élément de $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$
- Racine et pôle d'une fraction (avec la notion de multiplicité), *fonction* rationnelle, compatibilité avec les opérations $+, \lambda\cdot, \times$
- **Décomposition en éléments simples** : partie entière, forme générale sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$, aperçu de "recettes de cuisine" pour trouver les coefficients

Les questions de cours sont en page suivante.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **19, 21 ou 22** . *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Donner une caractérisation de $(X-\alpha)^r \mid P$ en fonction de P et de ses dérivées (et la démontrer) Chapitre 22, Théorème 22.30
2. Relations coefficients-racines Chapitre 23, Théorème 23.4
3. Montrer que $P \wedge Q = 1$ si et seulement si P et Q n'ont pas de racine commune dans $\mathbb{C}$ Chapitre 23, Théorème 23.14

Exemples de questions libres :

Chapitre 19 :

- Soit A, B, C des matrices de tailles respectives (n,p), (p,q) et (q,r). Rappeler la formule qui exprime $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Rappeler la formule du binôme pour les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.

Chapitre 21 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P+Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P

Chapitre 22 :

- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Si $A \mid B$ et $B \mid A$, que peut-on dire ?
- Énoncer le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$. Quelles sont les trois conditions que doit vérifier un polynôme D pour être le PGCD de A et de B ?
- Rappeler le théorème de Bézout pour des polynômes
- Si $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(10)}(\alpha) = 0$, que peut-on dire sur la multiplicité de α ? Est-ce qu'il y a d'autres caractérisations équivalentes de cela ?