Programme de colle n°17

semaine du 3 au 7 février

Notions vues en cours

Chapitre 21 : Polynômes (Partie A)

- Polynôme à une indéterminée à coefficients dans $\mathbb{K}$, coefficients d'un polynôme, ensemble $\mathbb{K}[X]$, polynôme nul, méthode d'identification
- Degré d'un polynôme, notation $\deg P$ ou $\deg(P)$, $\deg 0 = -\infty$, on identifie les polynômes constants (degré négatif) à un élément de $\mathbb{K}$
- Écriture dite développée : $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, cela équivaut à $\deg P \leq n$, ensemble $\mathbb{K}_n[X]$; Si de plus $a_n \neq 0$, cela équivaut à $\deg P = n$; coefficient dominant, polynôme unitaire, monôme
- Opération $+$ et $\lambda\cdot$ sur $\mathbb{K}[X]$, degré de $P+Q$, de λP, $(\mathbb{K}[X], +)$ est un groupe abélien, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-groupe
- Opération $\times$ sur $\mathbb{K}[X]$, degré de PQ, $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau intègre (avec les conséquences que cela entraine), les inversibles de $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 0,
- Puissance d'un polynôme, degré de P^n, formules $(A+B)^n$ et $A^n - B^n$ avec A et B deux polynômes
- Opération $\circ$ sur $\mathbb{K}[X]$: définition, associativité, degré de $P \circ Q$
- Évaluation de P en $\alpha \in \mathbb{K}$, qu'on note $P(\alpha)$. Fonction polynômiale : définition, on note $f_P \in \mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ la fonction associée à P, l'application $P \mapsto f_P$ est bijective et "compatible" avec les lois $+, \times, \lambda\cdot, \circ$ définies sur $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$ et $\mathbb{K}[X]$
- Polynôme dérivé P', compatibilité $(f_P)' = f_{P'}$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, degré de P', dérivées de $\lambda P + \mu Q$, de PQ et de $P \circ Q$
- Dérivée n-ième de P, notation $P^{(k)}$, degré de $P^{(n)}$, dérivées n-ièmes de $\lambda P + \mu Q$, de PQ et de $P \circ Q$
- Formule de Taylor (valide pour tout $n \geq \deg P$), si $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ alors $a_k = \dfrac{1}{k!} P^{(k)}(0)$, injectivité de $P \mapsto f_P$

Chapitre 22 : Polynômes (Partie B)

- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, notation $B \mid A$, si $B \mid A$ et $A \neq 0$ alors $\deg B \leq \deg A$; si $B \mid A$ et $\deg B = \deg A$, alors B et A sont associés ($\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \quad A = \lambda B$)
- La relation $\mid$ est réflexive et transitive, on a $B \mid A$ et $A \mid B$ ssi A et B sont associés
- Division euclidienne de A par $B \neq 0$, calcul pratique de la division, $B \mid A$ si et seulement si le reste est nul
- $D \mid A$ et $D \mid B$ entraine que pour tous U, V on a $D \mid AU + BV$; si $A \neq 0$, alors $AB \mid AC$ ssi $B \mid C$
- <u>Un</u> PGCD de deux polynômes (diviseur commun de degré maximal), ces PGCD sont associés deux à deux,
- <u>Le</u> PGCD de deux polynômes : c'est un PGCD unitaire, il est unique, notation $A \wedge B$
- Propriétés "classiques" du PGCD : $(\lambda A) \wedge (\mu B) = A \wedge B$ pour tous λ, μ non nuls, $A \wedge \lambda = 1$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, etc. Algorithme d'Euclide (y compris étendu), théorème de Bézout-Bachet, coefficients de Bézout
- Polynômes premiers entre eux, théorème de Bézout, $\dfrac{A}{A \wedge B}$ et $\dfrac{B}{A \wedge B}$ sont premiers entre eux
- Corollaires de Bézout : Lemme de Gauss ; $A \mid C$, $B \mid C$ et $A \wedge B = 1$ entraine $AB \mid C$; $A_1 \wedge B = 1$ et $A_2 \wedge B = 1 \implies (A_1 A_2) \wedge B = 1$
- PPCM de deux polynômes : définition, unicité notation $A \vee B$, propriétés classiques, le polynôme $(A \wedge B)(A \vee B)$ est associé à AB
- PGCD d'un nombre fini de polynômes, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble / deux à deux, extension des théorèmes de Bézout et Bézout-Bachet

Hors-programme cette semaine : notion de racine (notamment la factorisation et le fait qu'un polynôme non nul ne peut avoir plus de racines que son degré).

<u>Les questions de cours sont en page suivante.</u>

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **18, 19 ou 21** . *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Degré de la somme de deux polynômes Chapitre 21, Théorème 21.12
2. Définition du produit de deux polynômes, degré du produit de deux polynômes Chapitre 21, Définition 21.14 et Théorème 21.15
3. Formule de Taylor : on ne démontrera la formule que pour $\alpha = 0$ Chapitre 21, Théorème 21.34
4. Théorème de la division euclidienne : énoncé, puis démonstration de l'unicité Chapitre 22, Théorème 22.4

Exemples de questions libres :

Chapitre 18 :

- On munit E d'une l.c.i. $\top$. Donner la définition d'un élément neutre pour $\top$ avec des quantificateurs.
- Soit $\top$ une l.c.i sur E et $x \in E$. Donner la définition de "x est symétrisable pour $\top$" avec des quantificateurs.
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérifier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Donner une caractérisation de "H est un sous-groupe de G".
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de f. À quelle condition sur le noyau est-ce que f est injective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "B est un sous-anneau de A"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\mathrm{Inv}(A)$) ?
- Rappeler la définition d'anneau intègre.

Chapitre 19 :

- Soit A, B, C des matrices de tailles respectives (n, p), (p, q) et (q, r). Rappeler la formule qui exprime $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Rappeler la formule du binôme pour les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.

Chapitre 21 :

- Écrire la forme développée (avec un signe $\sum$) d'un polynôme P tel que $\deg P \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$). Donner une CNS pour avoir $\deg P = n$.
- Donner les formules des degrés de $P + Q$ et de PQ
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$. Compléter la formule : $PQ = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Compléter la formule : $P' = \sum_{k=0}^{\dots} c_k X^k$ avec $c_k = \dots$
- Énoncer la formule de Taylor pour un polynôme P