Programme de colle n°16

semaine du 27 au 31 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 19 : Calcul matriciel (suite et fin)

- Anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$, matrice identité I_n, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est non commutatif si $n \geq 2$
- Matrice scalaire, matrice diagonale, notation $\mathrm{diag}(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notation $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$
- Matrice triangulaire inférieure (stricte), matrice triangulaire supérieure stricte), matrice triangulaire, notations $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, propriétés $\mathcal{T}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cup \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}) \cap \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$
- Le produit de deux matrices diagonales / tri. inférieures / tri. supérieures est encore une matrice diagonale / tri. inférieure / tri. supérieure et les diagonales sont multipliées terme à terme
- Puissance k-ième de A avec $k \in \mathbb{Z}$, puissance k-ième d'une matrice diagonale, formules du binôme et $A^k - B^k$
- Matrice inversible, matrice inverse, notations A^{-1} et $GL_n(\mathbb{K})$, A est inversible ssi elle est inversible à gauche ssi elle est inversible à droite, formules $(A^{-1})^{-1} = A$ et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- Matrice transposée, notation $A^\top$, l'application $A \mapsto A^\top$ est involutive et linéaire, formule $(AB)^\top = B^\top A^\top$, formule $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$
- Matrice symétrique, matrice antisymétrique, notation $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls

Chapitre 20 : Systèmes linéaires

- Système linéaire : définition, coefficients, second membre, système homogène associé, système (in)compatible
- Matrice associée à un système, écriture matricielle, structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire
- Opération élémentaire sur les lignes (dilatation, permutation, transvection)
- Système équivalent, toute opération élémentaire transforme un système en un système équivalent
- Matrice échelonnée, matrice augmentée d'un système, pivot, algorithme du pivot de Gauss
- Matrice échelonnée réduite, variable pivot, variable libre, obtention de l'ensemble des solutions
- Calcul de l'inverse d'une matrice par la méthode du pivot (avec une matrice augmentée ayant I_n à droite)
- CNS d'inversibilité des matrices diagonales / triangulaires, et forme des matrices inverses

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **17 à 19**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Produit de deux matrices élémentaires Chapitre 19, Théorème 19.10
2. Transposée d'un produit matriciel et transposée de l'inverse Chapitre 19, Théorèmes 19.25 et 19.26
3. Linéarité de la transposée, définition de matrice symétrique et antisymétrique, montrer que les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls Chapitre 19, Théorèmes 19.24 assertion 2 et 19.28, Définition 19.27

Exemples de questions libres :

Chapitre 17 :

- Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le lemme de Gauss.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier n sous forme de facteurs premiers.
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que doit vérifier a pour être inversible modulo n ? Si c est un tel inverse, donner une relation vérifiée par a et c.
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Chapitre 18 :

- On munit E d'une l.c.i. $\top$. Donner la définition d'un élément neutre pour $\top$ avec des quantificateurs.
- On munit E d'une l.c.i. $\top$. Soit $x \in E$. Donner la définition de "x est symétrisable pour $\top$" avec des quantificateurs.
- Rappeler (éventuellement oralement) quelles sont les 4 propriétés à vérfiier pour que $(G, \top)$ soit un groupe.
- Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Donner une caractérisation de "H est un sous-groupe de G".
- Soit f un morphisme de groupes. Rappeler la définition et la notation du noyau de f. À quelle condition sur le noyau est-ce que f est injective ?
- Soit $(A, +, \times)$ un anneau. Donner une caractérisation de "B est un sous-anneau de A"
- Rappeler la formule du binôme dans un anneau.
- Soit $(A, +, \times)$ et $(A', +, \times)$ deux anneaux. Que doit vérifier $f : A \to A'$ pour être un morphisme d'anneaux ?
- Si $(A, +, \times)$ est un anneau, quelle structure algébrique peut-on donner sur l'ensemble de ses éléments inversibles (noté $\mathrm{Inv}(A)$) ?
- Rappeler la définition d'anneau intègre.

Chapitre 19 :

- Soit A, B, C des matrices de tailles respectives (n, p), (p, q) et (q, r). Rappeler la formule qui exprime $[AB]_{ij}$ en fonction des coefficients de A et de B.
- Donner toutes les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Rappeler la formule du binôme pour les matrices dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Exprimer différemment $(AB)^\top$ et $(A^\top)^{-1}$.
- Rappeler la définition de matrice symétrique et de matrice antisymétrique.