Programme de colle n°10

semaine du 2 au 6 décembre

Notions vues en cours

Chapitre 12 : Suites réelles (en complément du programme précédent) :

- Suites récurrentes linéaires d'ordre 1 : terme général et somme des termes pour les suites arithmétiques et géométriques, terme général pour les suites arithmético-géométriques
- Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 : détermination du terme général (cas réel et complexe)
- Suite récurrente d'ordre 1 : $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$ donné et f une fonction réelle.
  - Intervalle stable par f ; si J est stable par f et $u_0 \in J$, alors (u_n) est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in J$
  - Point fixe de f ; si la suite (u_n) converge vers ℓ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f
  - Méthode générale pour trouver la limite de (u_n) sur un ensemble où f est croissante *(on pourra recevoir de l'aide sur les étapes à suivre, notamment si f est décroissante, mais les arguments à utiliser pour réaliser chacune de ces étapes doivent être maitrisés).*

Chapitre 13 : Limites, continuité

- Une fonction vérifie une propriété $\mathfrak{P}$ sur J si $f|_J$ vérifie cette propriété (sauf pour la continuité et la dérivabilité), vérification d'une propriété au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$
- Limite (finie ou non) d'une fonction en a (dans $\mathbb{R}$ ou infini), notation $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ / $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ / $\lim\limits_{a} f = \ell$
- Unicité de cette limite, admettre une limite finie en $a \in \overline{\mathbb{R}}$ implique d'être bornée au voisinage de a
- Caractérisation séquentielle de la limite
- Limites et inégalités : passage à la limite, théorème d'encadrement, si $f \leq g$ au voisinage de a et f tend vers $+\infty$ en a, alors g tend vers $+\infty$ en a
- Opérations sur les limites : somme, produit, inverse, composition. Si f est bornée au voisinage de a et g tend vers zéro en a, alors fg tend vers zéro en a.
- Limite à gauche, limite à droite. L'existence d'une limite implique l'existence d'une limite à gauche et d'une limite à droite qui sont égales. Cas particulier des limites à gauche et à droite sur les bords.
- Théorème de la limite monotone
- Vu en TD : calcul de limites par le taux d'accroissement
- Continuité en un point, discontinuité en un point. Caractérisation séquentielle de la continuité
- Continuité à gauche, à droite. La continuité en un point équivaut à la continuité à gauche et à droite
- f est continue sur un ensemble I si f est continue en chaque point de I. Ensemble $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ ou $\mathscr{C}(I)$.
- Opérations et continuité : somme, produit, inverse, composition (en un point, sur un intervalle)
- Prolongement par continuité d'une fonction f définie sur $I \setminus \{a\}$ en un point $a \in I$: définition, théorème, notation $\widetilde{f}$ (mais si la notation n'est pas imposée, on peut écrire "on pose $f(a) = ...$")
  - Si a est un bord de I, la limite de f en a existe ssi la limite à gauche (si $a = \sup I$) ou à droite (si $a = \inf I$) existe. Il y a alors égalité de ces deux limites
  - Si a est un point intérieur de I, la limite de f en a existe ssi la limite à gauche ET à droite existe ET qu'elles sont égales. Il y a alors égalité de ces trois limites

Les questions de cours sont en page suivante.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **11 ou 12**. *Des exemples de questions figurent ci-dessous.*

Question fixée. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.*

1. Définition de $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ en termes de quantificateurs : l'examinateur demandera 3 cas parmi les 9 (a fini, $+\infty$ ou $-\infty$, idem pour ℓ) Chapitre 13, Définitions 13.5 et 13.7
2. Unicité de la limite : on ne démontrera que le cas d'une limite finie en un point $a \in \mathbb{R}$ Chapitre 13, Théorème 13.8
3. Caractérisation séquentielle de la limite : on ne démontrera que le sens $(ii) \implies (i)$, càd celui dont la conclusion est que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$. On ne traitera que le cas où a et ℓ sont finis Chapitre 13, Théorème 13.9

Exemples de questions libres :

Chapitre 11 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase "$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure : $m = \inf A \iff$ ...
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture "$\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$"
- Soit $X \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de "X est une partie dense dans $\mathbb{R}$" (deux assertions possibles, une seule suffit).

Chapitre 12 :

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Donner la définition de $u_n \to \ell$ en termes de quantificateurs.
- Donner la définition de $u_n \to +\infty$ en termes de quantificateurs.
- Donner la définition de "(u_n) et (v_n) sont adjacentes" puis oralement : que peut-on en déduire sur (u_n) et (v_n) ?
- Donner la définition de "ℓ est une valeur d'adhérence de (u_n)".
- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Énoncer une caractérisation de "$M = \sup A$" avec des suites.