Programme de colle n°9

semaine du 25 au 29 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 12 : Suites réelles

- Généralités : suite réelle, notation u ou (u_n), terme général u_n, suite définie explicitement, implicitement, par récurrence
- Opérations $+, -, \times, \lambda\cdot, /$ et $\leq$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Propriété vérifiée à partir d'un certain rang
- Suite positive, négative, croissante, décroissante, monotone (strictement ou non), constante, stationnaire, majorée, minorée, bornée (avec CNS sur $|u_n|$),
- Limite finie ou infinie, notation $u_n \to \ell$ ou $\lim u_n = \ell$, nature d'une suite, suite CV, suite DV, unicité de la limite, toute suite CV est bornée
- Pour montrer que $u_n \to \ell$, on peut notamment majorer $|u_n - \ell|$ par une suite v_n qui tend vers 0. Si $u_n \to \ell$ alors $|u_n| \to |\ell|$
- Opérations sur les limites (version suites), formes indéterminées, $u_n \to 0$ et (v_n) bornée entraine $u_n v_n \to 0$
- Passage à la limite dans les inégalités, théorèmes d'encadrement
- Théorème de la limite monotone
- Suites adjacentes : définition, théorème de convergence, la limite est encadrée par les deux suites
- Extractrice. Suites extraite (ou sous-suite), valeur d'adhérence, si une suite converge, toute sous-suite converge vers la même limite
- Vu en TD : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ. On pourra utiliser ce résultat sans démonstration.
- Théorème des segments emboités, théorème de Bolzano-Weierstrass (réel)
- Suites complexes : définition, suite bornée, extension des résultats du cas réel qui ne font pas appel à la notion d'ordre
- Limite de $f(u_n)$, caractérisations de la densité et de la borne supérieures avec des suites

Les suites récurrentes (linéaires ou non) ne sont pas au programme de cette semaine, mais les suites arithmétiques et géométriques et leurs propriétés (terme général, somme des termes) sont considérées comme connues.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **9 ou 11**. *Des exemples de questions figurent en page suivante.*

Question fixée.

1. Définition de la limite *finie* d'une suite, unicité de la limite *finie* d'une suite
   Chapitre 12, Définition 12.7 **(item 1)**, Théorème 12.8
2. Définition de la limite *finie* d'une suite, que dire d'une suite (u_n) croissante et majorée ?
   Chapitre 12, Définition 12.7 **(item 1)**, Théorème 12.20 **(suite croissante, item 1)**
3. Définition de $u_n \to +\infty$, que dire d'une suite (u_n) croissante et non majorée ?
   Chapitre 12, Définition 12.12 **(item 2)**, Théorème 12.20 **(suite croissante, item 2)**
4. Suites adjacentes : définition, théorème de convergence
   Chapitre 12, Définition 12.21 et Théorème 12.22

Exemples de questions libres :

Chapitre 8 :

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Donner deux expressions de la dérivée de $\mathrm{th} x$.

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème fondamental de l'analyse.
- Soit u une fonction dérivable. Donner une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ et de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Donner une primitive de $\cos(3x)$ et de $\dfrac{1}{1+x^2}$.
- Énoncer le théorème d'intégration par parties en rappelant bien toutes les hypothèses.
- Que peut-on dire de $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ si f est impaire ? si f est paire ?

Chapitre 11 :

- Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$. Que doit vérifier M pour être un majorant de A ? pour être le maximum de A ?
- Que veut-dire la phrase "$\mathbb{R}$ possède la propriété de la borne supérieure" ?
- Compléter la caractérisation de la borne inférieure : $m = \inf A \iff$ ...
- Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Donner la définition de l'écriture "$\displaystyle\sup_{x\in[a,b]} f(x)$"
- Soit $X \subset \mathbb{R}$. Donner une définition de "X est une partie dense dans $\mathbb{R}$" (deux assertions possibles, une seule suffit).