

Programme de colle n°7

semaine du 11 au 15 novembre

Notions vues en cours

Chapitre 9 : Primitives et intégrales

- Primitive d'une fonction sur un intervalle I , la différence de deux primitives sur un intervalle est une constante
- Primitive d'une fonction sur un ensemble D , les constantes d'intégration peuvent être différentes sur chaque intervalle de D
- Un formulaire de primitives usuelles est disponible sur le site.
- Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$, notation $\int_a^b f(x)dx$ ou $\int_a^b f$. Extensions $\int_b^a f$ et $\int_a^a f$, interprétation de $\int_a^b f$ comme une aire signée
- Théorème fondamental de l'analyse, notation $[F(x)]_a^b$, toute fonction continue sur I admet des primitives, définition d'une fonction de classe \mathcal{C}^1
- Primitives de $x \mapsto u'(\lambda x + c)$, $u'e^u$, $\frac{u'}{u}$, $u'u^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$), avec u une fonction dérivable sur I
- Propriétés de l'intégrale : linéarité, Chasles, croissance, positivité, IPP, changement de variables
- Notation (officielle) $\int^x f(t)dt$ et $[F(t)]^x$ pour désigner une primitive générique de f
- Intégrales de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , intégrale d'une fonction paire, impaire ou périodique
- Les méthodes pour intégrer les fonctions suivantes doivent être connues : $e^{ax} \cos(bx)$, $e^{ax} \sin(bx)$, $\cos^n x$, $\sin^n x$ et $\frac{1}{ax^2 + bx + c}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, c \in \mathbb{R}$ (vu : décomposition de $\frac{1}{(x - \alpha)(x - \beta)}$ en éléments simples)
- Vu en TD : règle de Bioche et changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$ pour intégrer les fonctions rationnelles en $\cos x$ et en $\sin x$

Chapitre 10 : Équations différentielles

- ED : définition, ordre, intervalle d'étude I , conditions initiales
- ED linéaire : définition, coefficient, second membre, équation homogène, forme résolue ou non résolue
- Ensemble $a + B$ avec $a \in \mathbb{K}$ et $B \subset \mathbb{K}$. Structure des solutions d'une ED linéaire
- ED linéaire du premier ordre $y' + a(t)y = b(t)$ avec $a, b : I \rightarrow \mathbb{K}$ continues, méthode de résolution :
 - 0) Donnée de l'intervalle d'étude I
 - 1) Solution générale de l'équation homogène
 - 2) Solution particulière par la variation de la constante
 - 3) Solution générale de l'ED avec second membre
- Problème de Cauchy, théorème de Cauchy-Lipschitz, et 4) Vérification d'une condition initiale

Pour une ED non résolue, le raccord d'une solution a été vu en TD (par analyse-synthèse) mais doit être guidé.

Questions de cours

Question libre. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur. Cette question est basée sur un ou plusieurs énoncés encadrés tirés du polycopié (définition, propriété, corollaire, théorème SAUF méthode et SAUF les encadrés "non-officiel"), parmi les chapitres **7 à 9**. Des exemples de questions figurent en page suivante.

Question fixée. Pas de question fixée cette semaine. Les points qui lui sont normalement attribués sont répercutés sur les exercices, qui seront plus nombreux cette semaine.

Exemples de questions libres :

Chapitre 7 :

- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est majorée”.
- Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Donner la définition de “ f est strictement croissante”.
- Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$. Donner la définition du taux d’accroissement de f en a . Puis oralement : que doit-il vérifier pour que f soit dérivable en a ?
- Donner deux formules de dérivation (au choix de l’examineur)
- Si f et g sont croissantes, est-ce qu’on peut affirmer que leur produit fg est croissante ?

Chapitre 8 :

- Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bijective. Quelles sont les hypothèses à vérifier pour affirmer que f^{-1} est dérivable en y ? Que vaut alors $(f^{-1})'(y)$?
- Énoncer les croissances comparées en $+\infty$
- Pour quelles valeurs de x a-t-on $\arcsin(\sin x) = x$? Et $\sin(\arcsin x) = x$?
- Donner les dérivées de $\arccos x$ et de $\arctan x$.
- Donner deux expressions de la dérivée de $\operatorname{th} x$.

Chapitre 9 :

- Énoncer le théorème fondamental de l’analyse.
- Soit u une fonction dérivable. Donner une primitive de $\frac{u'}{u}$ et de $u'u^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Donner une primitive de $\cos(3x)$ et de $\frac{1}{1+x^2}$.
- Énoncer le théorème d’intégration par parties en rappelant bien toutes les hypothèses.
- Que peut-on dire de $\int_{-a}^a f$ si f est impaire ? si f est paire ?