Chapitre 34

Dénombrement

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E et F désignent des ensembles **finis** (i.e. ils ne possèdent qu'un nombre fini d'éléments).

1 Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition et premières propriétés

Théorème 34.1

E et F sont dits <u>en bijection</u> s'il existe une bijection f de E sur F, et on notera $E \simeq F$. Il s'agit d'une relation d'équivalence sur les ensembles.

Démonstration. Montrons que $\simeq$ est une relation d'équivalence. Soit E, F et G trois ensembles.

- $\mathrm{id}_E : E \to E$ est une bijection, donc $E \simeq E$: la relation $\simeq$ est réflexive.
- On suppose que $E \simeq F$. Alors il existe une bijection f de E sur F. L'application f^{-1} est alors une bijection de F sur E (avec $(f^{-1})^{-1} = f$) si bien que $F \simeq E$: la relation est symétrique.
- On suppose que $E \simeq F$ et $F \simeq G$. Il existe donc deux bijections $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Dans ce cas, $g \circ f$ est aussi une bijection de E sur G, d'où $E \simeq G$: la relation est transitive.

□

Définition 34.2 – Ensemble fini, infini

On dit que E est un ensemble fini s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $E \simeq [\![1,n]\!]$. Dans ce cas, un tel n est unique. On l'appelle le cardinal de E, et on note

$$n = \operatorname{card}(E) \qquad \text{ou} \qquad n = |E|$$

Si un tel $n \in \mathbb{N}$ n'existe pas, on dit que E est un ensemble infini.

- L'ensemble vide est le seul ensemble avec 0 élément. Cela correspond au cas $n = 0$ de la définition.
- Si $\operatorname{card}(E) = n$, alors le fait de choisir une bijection

$$\begin{aligned} [\![1,n]\!] &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

revient à choisir une numérotation des éléments de E. On peut alors écrire $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$. On dit qu'on a indexé les éléments de E, ou encore que l'application $i \mapsto a_i$ ci-dessus est une indexation de E.

Théorème 34.3

Si $\operatorname{card}(E) = n$ et $E \simeq F$, alors $\operatorname{card}(F) = n$.

Démonstration.

□

Attention. La notation " $\operatorname{card}(E)$ " n'a de sens que si E est de cardinal fini (tout comme $\dim F$ n'a de sens que si l'e.v. F est de dimension finie).

1.2 Opérations sur les cardinaux

Théorème 34.4 – Inclusion

Soit A un ensemble tel que $A \subset E$. Alors A est un ensemble fini et $\operatorname{card}(A) \leq \operatorname{card}(E)$
De plus, si $\operatorname{card}(A) = \operatorname{card}(E)$, alors $A = E$.

Comme pour les s.e.v., si on veut montrer que deux ensembles finis sont égaux, il est suffisant de montrer que l'un est inclus dans l'autre et que leurs cardinaux sont égaux.

Théorème 34.5 – Union disjointe, union quelconque

Soit A et B deux sous-ensembles de E **disjoints**. On a alors :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B)$$

Plus généralement, si A et B sont deux sous-ensembles de E, alors :

$$\operatorname{card}(A \cup B) = \operatorname{card}(A) + \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(A \cap B)$$

La première formule se généralise à n sous-ensembles finis $A_1, \cdots, A_n$ **disjoints deux à deux** :

$$\operatorname{card}(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \operatorname{card}(A_1) + \ldots + \operatorname{card}(A_n)$$

Un dessin suffit pour se convaincre de la seconde formule :

Si A est un sous-ensemble de E, on notera $\overline{A} := E \setminus A$ son complémentaire (la notation A^c existe aussi)

Théorème 34.6 – Différence et complémentaire

Soit A et B deux sous-ensembles de E. On a :

$$\operatorname{card}(B \setminus A) = \operatorname{card}(B) - \operatorname{card}(B \cap A)$$

En particulier, avec $B = E$, on obtient :

$$\operatorname{card}(\overline{A}) = \operatorname{card}(E) - \operatorname{card}(A)$$

À nouveau, on peut se convaincre de la première formule par un dessin.

Théorème 34.7 – Produit cartésien

(On suppose E et F finis). L'ensemble $E \times F$ est fini et

$$\operatorname{card}(E \times F) = \operatorname{card}(E) \times \operatorname{card}(F)$$

Cela explique la notation $E \times F$: en effet $|E \times F| = |E| \times |F|$. Plus généralement, si $E_1, \cdots, E_n$ sont finis, on a $|E_1 \times \ldots \times E_n| = |E_1| \times \ldots \times |E_n|$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a $\operatorname{card}(E^p) = \operatorname{card}(E)^p$.

Preuve formelle. On pose $n = \operatorname{card}(E)$ et $m = \operatorname{card}(F)$. Par indexations de E et de F, on peut poser $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$ et $F = \{b_1, \cdots, b_m\}$. En particulier, un élément de $E \times F$ s'écrit de manière unique sous la forme (a_i, b_j) avec $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, m]\!]$. On en conclut que l'application

$$\begin{aligned} f : [\![1, n]\!] \times [\![1, m]\!] &\to E \times F \\ (i, j) &\mapsto (a_i, b_j) \end{aligned}$$

est bijective. Ainsi,

$$\mathrm{card}(E\times F)=\mathrm{card}([\![1,n]\!]\times[\![1,m]\!])=nm=\mathrm{card}(E)\times\mathrm{card}(F)$$

□

Rappel : si E,F sont deux ensembles, alors on note $F^E:=\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F.

Théorème 34.8 – "Puissance"

(On suppose E et F finis). Alors F^E est fini et

$$\mathrm{card}(F^E)=\mathrm{card}(F)^{\mathrm{card}(E)}$$

Cela explique la notation F^E : en effet $\left|F^E\right|=|F|^{|E|}$. Attention à l'ordre ! En général, $|F|^{|E|}\neq|E|^{|F|}$: par exemple $2^3=8$ mais $3^2=9$.

Preuve informelle. On pose $n=\mathrm{card}(E)$ et $m=\mathrm{card}(F)$. Comme $E\simeq[\![1,n]\!]$ et $F\simeq[\![1,m]\!]$, on montre facilement avec des indexations de E et de F que l'ensemble $\mathcal{F}(E,F)$ est en bijection avec $\mathcal{F}([\![1,n]\!],[\![1,m]\!])$, donc ils ont les mêmes cardinaux. Il suffit donc de montrer que $\mathrm{card}\left([\![1,m]\!]^{[\![1,n]\!]}\right)=m^n$.

□

La preuve formelle consisterait à montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}([\![1,n]\!],[\![1,m]\!])&\to[\![1,m]\!]^n\\ f&\mapsto(f(1),\cdots,f(n))\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{card}\left([\![1,m]\!]^n\right)=\mathrm{card}\left([\![1,m]\!]\right)^n=m^n$, on a le résultat voulu.

Théorème 34.9 – $\mathscr{P}(E)$

(On suppose E fini). L'ensemble $\mathscr{P}(E)$ est fini et

$$\mathrm{card}(\mathscr{P}(E))=2^{\mathrm{card}(E)}$$

Preuve informelle. On pose $n=\mathrm{card}(E)$. Si $n=0$, alors $E=\varnothing$ et donc $\mathscr{P}(E)=\{\varnothing\}$ est bien de cardinal $2^0=1$.

□

La preuve formelle consisterait à montrer que l'application suivante est bijective :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(E)&\to\{0,1\}^E\\ X&\mapsto\mathbb{1}_X\end{aligned}$$

et comme $\mathrm{card}\left(\{0,1\}^E\right)=2^{\mathrm{card}(E)}$, on a le résultat voulu.

1.3 Cardinal de $f(E)$

Lemme 34.10

Soit $f : E \to F$ une application. Alors $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(E)$. De plus :

- f est injective si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$
- f est surjective si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F)$

Preuve informelle. On pose $n = \operatorname{card}(E)$ et, par indexation, $E = \{a_1, \cdots, a_n\}$. Alors, par définition,

$$f(E) = \{f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)\}$$

L'ensemble $f(E)$ contient au plus n éléments (mais éventuellement moins si par exemple $f(a_1) = f(a_2)$). D'où $\operatorname{card}(f(E)) \leq n = \operatorname{card}(E)$. Pour les autres assertions :

- f est injective si et seulement si $f(a_1), f(a_2), \cdots, f(a_n)$ sont tous distincts deux à deux, donc si et seulement si $f(E)$ possède autant d'éléments que E.
- f est surjective si et seulement si $f(E) = F$ donc si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F)$, car $f(E) \subset F$.

□

Théorème 34.11

On suppose que $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$. Soit $f : E \to F$ une application. Alors

$$f \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad f \text{ est surjective} \quad \text{ssi} \quad f \text{ est bijective}$$

Démonstration. Par le théorème précédent, on a :

$$f \text{ est injective} \quad \text{ssi} \quad \operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E) \quad \text{ssi} \quad \operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F) \quad \text{ssi} \quad f \text{ est surjective}$$

et l'équivalence avec "f est bijective" découle de la première équivalence. □

2 Dénombrement

Les problèmes de dénombrement sont très variés, comme on le verra dans les exemples. Il n'y a pas vraiment de théorème précis pour les résoudre, cela fera surtout appel à du bon sens et à reconnaitre quelques situations-types à connaitre. La pratique est donc essentielle ! La rédaction ne suit pas nécessairement des règles strictes, mais il est important de bien présenter quelques étapes qui vous conduisent à votre réponse.

2.1 p-uplets : avec ordre et avec répétition

Rappel : étant donné $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle p-uplet (ou p-liste) de E un élément de E^p, qui sera donc une famille de la forme $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ avec $a_1, \cdots, a_p \in E$. L'ordre compte :

$$(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_p) \neq (a_2, a_1, a_3, \cdots, a_p)$$

De plus, il est tout à fait possible de prendre plusieurs fois le même élément : on a bien $(a_1, \cdots, a_1) \in E^p$. **Les p-uplets** sont donc adaptés pour les dénombrements lorsque **l'ordre compte** et lorsque **la répétition est possible**.

Théorème 34.12 – Nombre de p-uplets

Si E est de cardinal n, alors il y a exactement n^p p-uplets de E.

Démonstration. Cela découle du fait que $\mathrm{card}(E^p) = n^p$. □

Méthode

Lorsque, pour dénombrer tous les cas possibles, on est amené à faire un choix parmi n_1 possibilités, **puis** un autre parmi n_2 possibilités, **puis** (...), **puis** un autre parmi n_k possbilités, il faut **multiplier** le nombre de possiblilités à chaque étape, ce qui donne un total de $n_1 n_2 \cdots n_k$ cas possibles.

Exemple 1. Un immeuble dispose d'un code d'entrée à quatre chiffres. Combien y a-t-il de combinaisons possibles ?

2.2 Arrangements : avec ordre et sans répétition

Définition 34.13 – p-arrangement

Soit $p \in [\![1, \mathrm{card}(E)]\!]$. On appelle <u>($p$-)arrangement</u> tout p-uplet $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ de E dont les éléments $a_1, \cdots, a_p$ sont distincts.

Les arrangements sont donc adaptés pour les dénombrements lorsque **l'ordre compte** et lorsque **la répétition est impossible**.

Exemple 2.
- $(1, 5, 2)$ est un (3-)arrangement de $[\![1, 10]\!]$.
- $(3, 6, 10, 3)$ n'est pas un (4-)arrangement de $[\![1, 10]\!]$.
- Il n'existe pas de 11-arrangement de $[\![1, 10]\!]$.

On peut étendre cette définition au cas $p = 0$: on considère que le seul 0-arrangement de E est la famille vide.

Théorème 34.14

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de p-arrangements de E est donné par

$$\frac{n!}{(n-p)!} \quad = \quad n(n-1)\cdots(n-p+1)$$

Le nombre de p-arrangements est parfois noté A_n^p ou encore $\mathrm{Arr}(n, p)$. Il n'y a pas de notation officielle. On remarque qu'avec $p = 0$, la formule ci-dessus est en accord avec la convention qu'il existe un et un seul 0-arrangment de E (la famille vide).

Preuve informelle.

$\square$

Corollaire 34.15 – Cardinal de S_n

$\text{card}(S_n) = n!$

Preuve formelle. Une permutation $\sigma \in S_n$ est entièrement déterminée par $(\sigma(1), \cdots, \sigma(n))$, qui est un n-arrangement de $[\![1, n]\!]$. Réciproquement tout n-arrangement $(a_1, \cdots, a_n)$ de $[\![1, n]\!]$ définit une et une seule permutation σ de S_n en posant $\sigma(1) = a_1, \cdots, \sigma(n) = a_n$. Ainsi, il y a autant de permutations de $[\![1, n]\!]$ qu'il y a de n-arrangements. Il y a donc $\text{Arr}(n, n) = \dfrac{n!}{(n-n)!} = n!$ éléments de S_n. $\square$

Une preuve informelle consisterait à dire qu'on dispose de n choix pour $\sigma(1)$, puis $n-1$ choix pour $\sigma(2)$, etc. jusqu'à 1 choix pour $\sigma(n)$, ce qui donne bien $n!$ cas possibles.

Sur le même principe, on montre que si E est de cardinal n, alors $\text{card}(S(E)) = n!$.

Exemple 3. Une classe de 32 étudiants se répartissent dans un amphi de 50 places. Combien de dispositions différentes peut-on obtenir ?

Aurait-on pu raisonner sur les places pour résoudre ce problème ? Un étudiant propose la réponse suivante. Qu'en pensez-vous ?

> L'amphi fait 50 places, mais on peut se limiter aux 32 places qui vont être prises par les étudiants. Pour la première de ces 32 places, il y a 32 choix possibles, puis pour la suivante il y a 31 choix, etc. jusqu'à la dernière place où il ne reste plus qu'un choix. On obtient donc un total de 32! possibilités.

2.3 Combinaisons : sans ordre et sans répétition

Rappel : pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$, on définit le coefficient binomial :

$$\binom{n}{p} := \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } 0 \leq p \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Définition 34.16

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. On appelle p-combinaison de E tout sous-ensemble de E avec p éléments (nécessairement distincts).

Exemple 4. Les éléments d'une p-combinaison doivent être distincts, et l'ordre ne compte pas :

- $\{1,2\} = \{2,1\}$ représente la même 2-combinaison.
- $\{1,2,3\} = \{3,1,2\} = \{3,2,1\}$ représente la même 3-combinaison.
- Plus généralement, pour toute p-combinaison $\{a_1, \cdots, a_p\}$ et $\sigma \in S_p$, on a $\{a_1, \cdots, a_p\} = \left\{a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)}\right\}$

Les combinaisons sont donc adaptés pour les dénombrements lorsque **l'ordre ne compte pas** et lorsque **la répétition est impossible**.

Théorème 34.17

On suppose E de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre total de p-combinaisons de E est $\dbinom{n}{p}$.

Idée de la preuve. À toute p-combinaison $\{a_1, \cdots, a_p\}$ on peut lui associer un total de $p!$ arrangements distincts $(a_{\sigma(1)}, \cdots, a_{\sigma(p)})$ avec $\sigma \in S_p$. Il y a "donc" $p!$ fois plus de p-arrangements que de p-combinaisons. Ainsi, le nombre N de p-combinaisons de E vérifie $N \times p! = \dfrac{n!}{(n-p)!}$, si bien que $N = \dbinom{n}{p}$. □

Théorème 34.18 – Formules classiques du coefficient binômial

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$:

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \qquad\qquad \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

Exemple 5. Une classe de 32 élèves souhaite élire deux délégué(e)s et deux suppléant(e)s. Combien de combinaisons possibles peut-on réaliser ?

3 Autres astuces de dénombrement

Diverses techniques peuvent également être employées / conjuguées aux précédentes :

Méthode – Passer au complémentaire

Il est parfois plus simple de dénombrer les cas qu'on ne souhaite pas compter pour en déduire le dénombrement des cas que l'on souhaite.

Exemple 6. Combien y a-t-il de codes à 4 chiffres avec au moins une fois le chiffre 7 ?

Méthode – Découpage en catégories

Lorsqu'on souhaite dénomber tous les cas possibles, on est parfois amené à regrouper ces cas en plusieurs catégories mutuellement exclusives, typiquement avec la formule **soit (...)**, **soit (...)**, **soit (...)**, etc.

Dans ce cas, on peut dénombrer chaque catégorie séparément et faire la **somme** pour obtenir le nombre total de cas.

Exemple 7. Dans un code à 4 chiffres, combien y a-t-il de codes différents contenant exactement une seule fois le chiffre 7 ?

Méthode – Classification

Pour dénombrer des cas, il est extrêmement utile de **classifier** les cas en question, de les regrouper en catégories (cf méthode précédente) ou encore de faire émerger un ordre qui permet de choisir selon le schéma "(...), puis (...), puis (...)".

Exemple 8. Avec un jeu de 52 cartes, on distribue des mains de 5 cartes.

1. Combien de mains peut-on avoir ?
2. Combien de mains possèdent exactement 3 cartes de même valeur ?

1.

2.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode – Récapitulatif des méthodes

Lorsqu'on cherche à dénombrer tous les cas possibles :

- Si on fait un choix, **puis** un autre, **puis** un autre, etc. on doit **multiplier** le nombre de choix possibles à chaque étape.
- Si on découpe les choix à faire en plusieurs catégories **disjointes**, avec la formule **soit (...)**, **soit (...)**, **soit (...)**, il faut **additionner** le nombre de choix possibles à chaque étape.
- Il est parfois plus simple de passer au complémentaire pour en déduire un dénombrement des cas souhaités.
- Il est toujours utile de **classifier** les cas : les regrouper par catégories disjointes ou encore définir un ordre pour différents choix.