Chapitre 33

Théorie de l'intégration

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial (non vide et non réduit à un point).
De plus, a et b sont deux réels tels que $a < b$.

1 Construction de l'intégrale

1.1 Subdivisions

Définition 33.1 – Subdivision d'un segment

Étant donné un segment $\left[a,b\right]$, on appelle <u>subdivision</u> (finie) de $\left[a,b\right]$ toute famille $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ de points de $\left[a,b\right]$ qui vérifient

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

On définit le <u>pas</u> de la subdivision σ comme l'écart maximal entre deux points consécutifs. On le notera :

$$\delta(\sigma) := \max_{0 \leq i \leq n-1} (x_{i+1} - x_i) > 0$$

Enfin, on définit le <u>support</u> de $\sigma = (x_0, \cdots, x_n)$ comme l'ensemble des points $x_0, \cdots, x_n$, càd

$$\operatorname{Supp}(\sigma) := \{x_0, \cdots, x_n\}$$

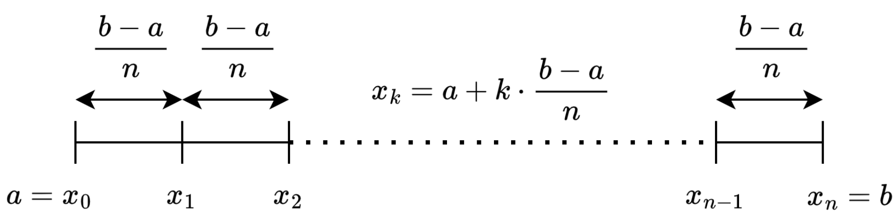
En réalité, une subdivision est entièrement déterminée par son support et certains ouvrages définissent une subdivision comme un ensemble de points et non une famille de points.

Comme son nom l'indique, une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ permet de subdiviser l'intervalle $\left[a,b\right]$ en une partition, constituée des singletons $\{x_i\}$ et des intervalles $\left]x_i, x_{i+1}\right[$:

$$\left[a,b\right] \;=\; \{x_0\} \,\cup\, \left]x_0,x_1\right[\,\cup\, \{x_1\} \,\cup\, \left]x_1,x_2\right[\,\cup \ldots \cup\, \{x_{n-1}\} \,\cup\, \left]x_{n-1},x_n\right[\,\cup\, \{x_n\}$$

Exemple 1. $\sigma = \left(k^2\right)_{0 \leq k \leq 3}$ est une subdivision de $\left[0,9\right]$, mais pas de $\left[0,10\right]$ ou de $\left[1,9\right]$.

Exemple 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ si on note $x_k = a + k \bullet \dfrac{b-a}{n}$, alors $\sigma = (x_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une subdivision de $\left[a,b\right]$ dite <u>subdivision régulière</u> :



On remarque que $x_{k+1} - x_k =$ .... Autrement dit, tous les points de cette subdivisions sont équidistants ; l'intervalle $\left[a,b\right]$ a été découpé en n sous-intervalles $\left(\left[x_k, x_{k+1}\right]\right)_{0 \leq k \leq n-1}$ de même longueur. Le pas de cette subdivision est $\delta(\sigma) =$ ....

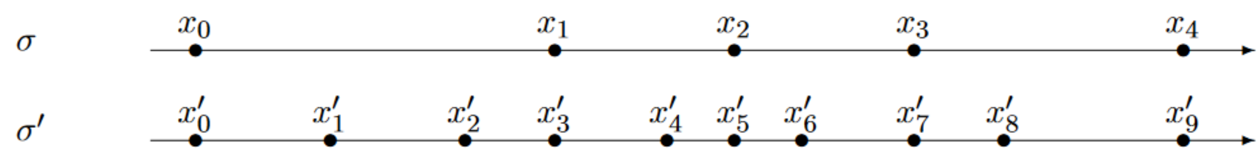
Définition 33.2 – Subdivision plus fine

Soit σ, σ' deux subdivisions de $\left[a,b\right]$. On dit que σ' est <u>plus fine</u> que σ si $\operatorname{Supp}(\sigma) \subset \operatorname{Supp}(\sigma')$.

On écrira abusivement $\sigma \subset \sigma'$ pour signifier cela.

Autrement dit, σ' est plus fine que σ si on peut obtenir la subdivision σ' à partir de σ en rajoutant zéro, un ou plusieurs points.

Exemple 3. Dans l'exemple ci-dessous, $\sigma' = \left\{x'_j \mid 0 \leq j \leq 9\right\}$ est plus fine que $\sigma = \{x_i \mid 0 \leq i \leq 4\}$. Le quadrillage / maillage de $[a,b]$ est plus "fin" avec σ' qu'avec σ.



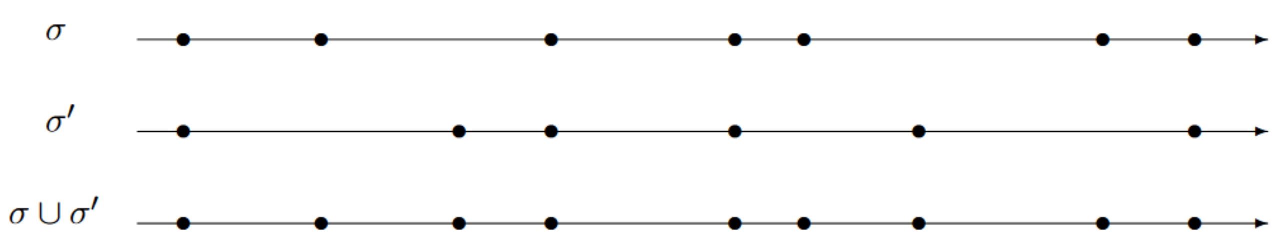
Définition 33.3

Soit $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ et $\sigma' = (x'_i)_{0\leq i\leq m}$ deux subdivisions de $[a,b]$. On définit la réunion de σ et σ' comme étant la subdivision σ'' définie par $\mathrm{Supp}(\sigma'') = \mathrm{Supp}(\sigma) \cup \mathrm{Supp}(\sigma')$.

On notera abusivement cette réunion $\sigma'' = \sigma \cup \sigma'$.

Autrement dit, σ'' est obtenue en prenant tous les points de σ et de σ' (si un point est présent en double, il n'est pris qu'une fois).

Exemple 4.



Exemple 5. Dans l'exemple 3, σ' est plus fine que σ et ainsi $\sigma \cup \sigma' = \sigma'$.

Remarque. $\sigma \cup \sigma'$ est plus fine que σ et que σ'.

1.2 Fonctions en escaliers

Définition 33.4 – Fonction en escalier

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. On dit que f est en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ telle que pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, la fonction f soit constante sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. Autrement dit :

$$\forall i \in [\![0,n-1]\!] \qquad \exists y_i \in \mathbb{K} \qquad \forall x \in \,]x_i,x_{i+1}[\qquad f(x) = y_i$$

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Notation. On note $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On notera qu'on n'impose aucune condition sur la valeur de f aux points x_i (excepté que f doit être définie en ces points).

Exemple 6. Toute fonction constante est en escalier sur tout intervalle $[a,b]$. La fonction partie entière est en escalier sur tout intervalle $[a,b]$.

Exemple 7. Les fonctions suivantes sont en escalier.

Exemple 8. La fonction id : $x \mapsto x$ n'est pas une fonction en escalier (sur aucun intervalle $[a,b]$ avec $a<b$), de même que la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$:

$$1_{\mathbb{Q}} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Théorème 33.5

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ et σ_f une subdivision adaptée à f. Alors, si σ' est plus fine que σ_f, la subdivision σ' est également adaptée à f.

Voir le dessin ci-dessus pour une illustration.

Théorème 33.6

$\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{K}^{[a,b]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{K}^{[a,b]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

En particulier, la somme, la différence, la multiplication par un scalaire et le produit de fonctions en escalier reste une fonction en escalier.

Démonstration. Soit f,g deux fonctions de $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. On note $\sigma_f = (x_i)_{0\le i\le n}$ et $\sigma_g = (x'_j)_{0\le j\le m}$ les subdivisions de $[a,b]$ associées à f et g. Ainsi, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$ (resp. pour tout $j \in [\![0,m-1]\!]$), la fonction f est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$ (resp. g est constante sur $]x'_j,x'_{j+1}[$).
On pose enfin la subdivision

$$\tau = \sigma_f \cup \sigma_g = (z_k)_{0\le k\le N}$$

qui est donc une subdivision plus fine que σ_f et σ_g. Par construction de τ, pour tout $k \in [\![0,N-1]\!]$, il existe i et j tels que l'intervalle $]z_k,z_{k+1}[$ est inclus dans $]x_i,x_{i+1}[$ et dans $]x'_j,x'_{j+1}[$. Ainsi, f et g sont constantes sur chaque intervalle $]z_k,z_{k+1}[$. Il en va donc de même pour $f-g$, pour fg, pour λf avec $\lambda \in \mathbb{K}$, ce qui prouve la première assertion.
Pour la seconde assertion, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f est constante sur $]x_i,x_{i+1}[$: on note y_i cette valeur. On montre alors par disjonction de cas que

$$\forall x \in [a,b] \qquad |f(x)| \le \max(|f(x_0)|,|y_0|,|f(x_1)|,|y_1|,\cdots,|y_{n-1}|,|f(x_n)|)$$

Le membre de droite représente un maximum d'un nombre fini de termes : sa valeur est donc bien finie et donc f est bornée sur $[a,b]$. □

1.3 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 33.7 – Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{K})$. On pose $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ une subdivision adaptée à f. Enfin, on note $y_i \in \mathbb{K}$ la valeur que prend f sur l'intervalle $]x_i, x_{i+1}[$. On définit l'intégrale de f comme étant le scalaire suivant :

$$\int_{[a,b]} f := \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) y_i$$

On peut vérifier que, si f est en escaliers, la valeur $\int_{[a,b]} f$ ne dépend pas de la subdivision adaptée σ que l'on choisit. Par ailleurs, l'intégrale de f ne dépend pas des valeurs de $f(x_0)$, $f(x_1)$, $\cdots$, $f(x_n)$. Enfin, on peut étendre cette définition à $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques (sans qu'on ait nécessairement $a < b$).

Définition 33.8 – Intégrale $\int_a^b f$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, sans supposer $a < b$.

- Si $a < b$ et que f est en escalier sur $[a,b]$ alors on pose $\int_a^b f := \int_{[a,b]} f$ (définition 33.7).
- Si $b < a$ et que f est en escalier sur $[b,a]$ alors, on pose $\int_a^b f := -\int_{[b,a]} f = -\int_b^a f$.
- Si $a = b$ (et que $a \in D_f$), alors (par convention) $\int_a^b f = \int_a^a f = 0$.

Notation non officielle : dans ce qui suit, on note $I_{a,b}$ l'intervalle fermé borné ayant a et b pour bornes, càd :

- Si $a < b$ alors $I_{a,b} = [a,b]$
- Si $b < a$ alors $I_{a,b} = [b,a]$

- Si $a = b$ alors $I_{a,b} = \{a\}$

On notera que par définition $I_{a,b} = I_{b,a}$.

Théorème 33.9 – Propriétés de l'intégrale (fonctions en escalier)

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ Soit f, g deux fonctions en escalier sur $I_{a,b}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Alors :

1. Linéarité : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est en escalier sur $I_{a,b}$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
2. Chasles : soit $c \in I_{a,b}$. Alors f est en escalier sur $I_{a,c}$ et sur $I_{c,b}$, et on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$
3. Positivité : si $f \geq 0$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
4. Croissance : si $f \leq g$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. **Inégalité triangulaire (intégrale)** : la fonction $|f|$ est en escalier et, si on a $\boxed{a \leq b}$:

Remarque. Pour la positivité et la croissance, il est sous-entendu que l'on doit avoir $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ pour les appliquer : si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les assertions "$f \geq 0$" et "$f \leq g$" n'ont pas de sens a priori.
On peut reformuler l'inégalité triangulaire sans supposer $a \leq b$ de la manière suivante :

$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f| \qquad \text{ou encore} \qquad \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

1.4 Fonctions continues par morceaux

Définition 33.10 – Fonction continue par morceaux

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$ telle que :

1. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, la fonction f restreinte à $]x_i, x_{i+1}[$ (càd $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$) est continue.
2. Pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, on peut prolonger $f|_{]x_i, x_{i+1}[}$ en une fonction continue sur $[x_i, x_{i+1}]$.

Une telle subdivision σ est dite adaptée à f.

Notation. On note $\mathcal{CM}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.

Autrement dit, f est continue par morceaux sur $[a, b]$ si elle n'admet qu'un nombre *fini* de points de discontinuité, et si f admet en tout point de discontinuité une limite à gauche (sauf en a) et une limite à droite (sauf en b) qui sont finies.

Exemple 9. Toute fonction continue sur $[a,b]$ est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Exemple 10. Les fonctions suivantes sont continues par morceaux.

Exemple 11. La fonction $x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[-1,1]$ car elle n'admet pas de limite finie à droite en 0.

Théorème 33.11

$\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathbb{R}^{[a,b]},+,\times)$.
De plus, si $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{R})$, alors f est bornée sur $[a,b]$.

Démonstration. Étant donné f,g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ de subdivisions adaptées σ_f et σ_g, on montre par exemple que $f+g$ est continue par morceaux. En posant $\sigma = \sigma_f \cup \sigma_g := (x_i)_{0\leq i\leq N}$, on montre que σ est adaptée à f et à g : sur tout intervalle $]x_i,x_{i+1}[$, f et g sont continues et prolongeables par continuité sur $[x_i,x_{i+1}]$ en une fonction continue, donc $f+g$ aussi. Idem pour λf et pour fg.

□

1.5 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Lemme 33.12 – Lemme d'approximation

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $g \in \mathcal{E}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$ telle que :

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon$$

La fonction g dépend de facto de ε.

Démonstration. La construction précise de g est hors-programme (mais on peut le voir sur un dessin) : $\square$

Théorème 33.13 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $\left[a,b\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)-g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $\left[a,b\right]$ par :

$$\int_{\left[a,b\right]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

  Cette limite ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie, ce qui fait que $\int_{\left[a,b\right]} f$ est bien définie.

Démonstration. Peut être sautée en première lecture. Cf section Compléments. $\square$

On a donc défini la valeur de $\int_{\left[a,b\right]} f$ pour une fonction continue par morceaux. Cette valeur présuppose d'avoir $a<b$. Comme pour les fonctions en escalier, on étend la définition de cette intégrale sans supposer $a<b$:

$$\int_a^b f := \begin{cases} \int_{\left[a,b\right]} f & \text{si } a<b \\ 0 & \text{si } a=b \\ \int_{\left[b,a\right]} f & \text{si } b<a \end{cases}$$

1.6 Intégrale d'une fonction complexe

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On rappelle qu'alors $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$. En particulier, on peut donner un sens aux notions de continuité par morceaux et d'intégrale pour les fonctions $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Définition 33.14 – Intégrale si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ le sont, et dans ce cas on définit l'intégrale de f par :

$$\int_a^b f \quad := \quad \int_a^b \mathrm{Re}\, f \quad + \quad i \int_a^b \mathrm{Im}\, f \quad \in \mathbb{C}$$

Notation. On note $\mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Théorème 33.15

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\displaystyle\int_a^b \mathrm{Re}\, f = \mathrm{Re}\left(\int_a^b f\right) \quad ; \quad \int_a^b \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Im}\left(\int_a^b f\right) \quad ; \quad \overline{\int_a^b f} = \int_a^b \overline{f}$

Démonstration. Cela découle immédiatement de la définition ci-dessus. □

Exemple 12. Calculer $I = \displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{t+i} dt$.

2 Propriétés de l'intégrale

2.1 Résultats liés à la construction

Dans ce qui suit, on utilise à nouveau la notation (non officielle !) $I_{a,b}$ introduite juste avant le Théorème 33.9.

Théorème 33.16

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ (sans supposer $a < b$) et $f, g : I_{a,b} \to \mathbb{K}$ deux fonctions continues par morceaux.

1. Linéarité : pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ la fonction $\alpha f + \beta g$ est continue par morceaux sur $I_{a,b}$ et
$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g$$
2. Chasles : soit $c \in I_{a,b}$. Alors f est continue par morceaux sur $I_{a,c}$ et $I_{c,b}$ et
$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$
3. Positivité : si $f \geq 0$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.
4. Croissance : si $f \leq g$ et $\boxed{a \leq b}$, alors $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.
5. **Inégalité triangulaire (intégrale)** : la fonction $|f|$ est continue par morceaux, et si $\boxed{a \leq b}$,
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_a^b |f|$$

Idée de la preuve. Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, par le théorème 33.13, on dispose d'une suite (h_n) de fonctions en escalier qui tend vers f. Ces propriétés étant vraies pour des fonctions en escalier, on démontre qu'elles le restent en passant à la limite. Une fois démontrées pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on les montre pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ en les appliquant à $\operatorname{Re} f$ et à $\operatorname{Im} f$. $\square$

Comme pour les fonctions en escalier, les propriétés de positivité et de croissance sous-entendent que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire intégrale peut se réécrire sans supposer $a \leq b$ de la manière suivante :
$$\left| \int_a^b f \right| \leq \int_{\min(a,b)}^{\max(a,b)} |f| \qquad \text{ou encore} \qquad \left| \int_a^b f \right| \leq \left| \int_a^b |f| \right|$$

Corollaire 33.17

Soit $f, g \in \mathcal{CM}([a,b], \mathbb{K})$. Si $|f| \leq M$ sur $[a,b]$, alors
$$\left| \int_a^b fg \right| \leq \int_a^b (|f| \times |g|) \leq M \int_a^b |g|$$

Exemple 13. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que $\displaystyle\int_0^x e^t \sin t \, dt \leq e^x - 1$

Théorème 33.18

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue* et *positive*, telle que $\displaystyle\int_a^b f = 0$. Alors, $f \equiv 0$.

Démonstration.

$\square$

Ce théorème est faux si f est seulement continue par morceaux. Par exemple, la fonction f définie par $f(0) = 1$ et pour tout $x \neq 0$ par $f(x) = 0$ a une intégrale nulle sur $\left[-1, 1\right]$ mais n'est pas identiquement nulle sur $\left[-1, 1\right]$.

2.2 Encadrement ou limite d'intégrale

Méthode – Trouver un encadrement avec une intégrale

Il arrive qu'on ne souhaite pas calculer une intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ mais simplement encadrer sa valeur. Dans ce cas, on peut trouver des fonctions "faciles à intégrer" g et h telles que

$$\forall t \in \left[a, b\right] \qquad g(t) \leq f(t) \leq h(t)$$

et alors par intégration selon t entre a et b, on a : $\displaystyle\int_a^b g(t)dt \leq I \leq \int_a^b h(t)dt$.

Par ailleurs, certaines intégrales peuvent dépendre d'un paramètre, typiquement

$$\begin{cases} I = I(n) = \displaystyle\int_a^b f(t,n)dt \qquad \text{ou} \qquad I = I(n) = \int_{a_n}^{b_n} f(t)dt \\ I = I(x) = \displaystyle\int_a^b f(t,x)dt \qquad \text{ou} \qquad I = I(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \end{cases} \tag{$*$}$$

et on peut chercher la limite ℓ de I quand le paramètre tend vers une valeur donnée (par exemple $n \to +\infty$ ou $x \to x_0$). On peut parfois **conjecturer** la limite ℓ en étudiant attentivement I. Il est par exemple fréquent que la limite de l'intégrale soit aussi l'intégrale de la limite (mais ce n'est pas un théorème !) :

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} I(n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t,n)dt \overset{\boxed{\text{NJ}}}{=} \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f(t,n)dt$$

Méthode – Trouver une limite avec une intégrale

Pour déterminer la limite d'une intégrale I à paramètre, typiquement sous une des formes de $(*)$, on peut :

- Conjecturer une limite ℓ, puis :
  - Si ℓ est finie, majorer $|I-\ell|$ par un terme qui tend vers 0.
  - Si $\ell=-\infty$, majorer I par un terme qui tend vers $-\infty$
  - Si $\ell=+\infty$, minorer I par un terme qui tend vers $+\infty$.
- Encadrer $f(t)$ / $f(t,x)$ / $f(t,n)$ par des fonctions simples, qui, après intégration selon t, tendent vers la même limite ℓ quand le paramètre tend vers la valeur donnée.

Exemple 14. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $I(n)=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{t+n}dt$. Déterminer la limite de $I(n)$ quand $n\to+\infty$.

Exemple 15. Pour tout $x>1$, on pose $I(x):=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{dt}{\ln t}$. Déterminer la limite de $I(x)$ lorsque $x\to+\infty$.

2.3 Théorème fondamental de l'analyse

On rappelle ici des résultats vus au chapitre 9 pour des fonctions continues ou de classe $\mathscr{C}^1$. Ils ne se généralisent *pas* aux fonctions continues par morceaux, l'hypothèse de continuité de la fonction (ou de sa dérivée) est essentielle :

Théorème 33.19 – Théorème Fondamental de l'Analyse

Soit I un intervalle, $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $a \in I$. L'application

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Démonstration. Soit $x_0 \in I$. Montrons que $\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} = f(x_0)$. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $x_0 + h \in I$ (ainsi F est bien définie en $x_0 + h$). Alors :

$$\begin{aligned}
F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0) &= \int_a^{x_0+h} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt - hf(x_0) \\
&= \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt - \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt \\
&= \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt
\end{aligned}$$

Or, comme f est continue en x_0, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall t \in I \cap \left]x_0 - \eta, x_0 + \eta\right[\qquad |f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, lorsque $|h| \leq \eta$, on a donc

$$\begin{aligned}
|F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)| &= \left| \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|\, dt \right| \\
&\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon dt \right| \\
&= \varepsilon |h|
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $|h| \leq \eta$ avec $h \neq 0$, on a

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)}{h} \right| \leq \varepsilon$$

Cela signifie que

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0) - hf(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

ou encore que

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$$

d'où le résultat. □

Corollaire 33.20 – TFA généralisé

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$, J un intervalle et $a, b : J \to I$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ (sur J). Alors la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : J &\to \mathbb{K} \\ x &\mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ (sur J) et

Démonstration.

□

Exemple 16. Montrer que l'application $g : x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{4-t}dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,2[$ et calculer sa dérivée.

Rappelons enfin quelques propriétés vues au premier chapitre d'intégration :

- Si F est une primitive de f sur $[a,b]$, alors $\quad F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$
- Intégration par parties : soit $u, v \in \mathscr{C}^1([a,b], \mathbb{K})$. Alors $\quad \int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$
- Changement de variable : soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathscr{C}^1([a,b], I)$. Alors :

$$\int_a^b (f \circ \varphi)(x)\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt$$

2.4 Parité, périodicité, valeur moyenne

Le résultat qui suit a été vu pour des fonctions continues. On peut l'étendre aux fonctions continues par morceaux :

Théorème 33.21

Soit $a > 0$ et f une fonction.

- Si $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si $f \in \mathcal{CM}([-a,a],\mathbb{K})$ est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.
- Si $f \in \mathcal{CM}(\mathbb{R},\mathbb{K})$ est T-périodique, alors pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{b}^{b+T} f = \int_{0}^{T} f$.

Définition 33.22 – Valeur moyenne

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On appelle valeur moyenne de f le scalaire

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f \quad \in \mathbb{K}$$

La valeur $\quad \alpha = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f \quad$ est l'unique scalaire qui vérifie $\quad \displaystyle\int_a^b f = \int_a^b \alpha$.

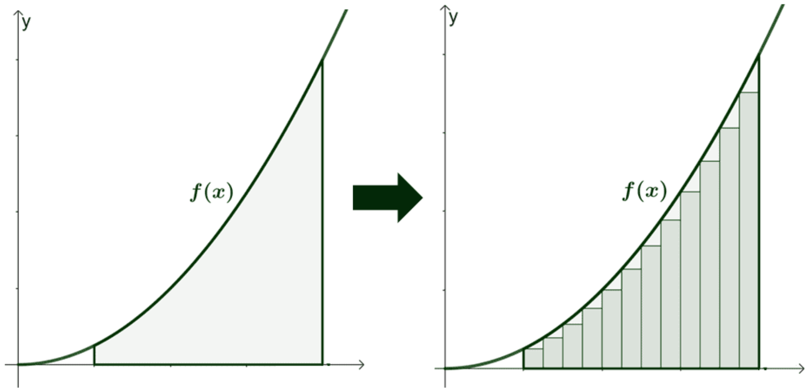
3 Sommes de Riemann – premiers pas vers le calcul numérique de l'intégrale

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On cherche à calculer numériquement (par Python ou autre) la valeur de $\displaystyle\int_a^b f$. Si on connait une primitive F de f sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f = F(b) - F(a)$. Mais Python ne pourra pas deviner une primitive pour n'importe quelle fonction f ! On présente ici une méthode pour construire numériquement une suite qui converge vers l'intégrale.

Pour cela, on considère la subdivision régulière de $[a,b]$ qui partage cet intervalle en n intervalles de même longeur : $\sigma = (x_i)_{0\leq i\leq n}$ avec

$$\forall i \in [\![0,n]\!] \qquad x_i = a + i\,\frac{b-a}{n}$$

Le principe est d'approcher l'aire sous la courbe de $\mathscr{C}_f$ par une succession de n rectangles, un pour chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$:



Il y a en tout n rectangles

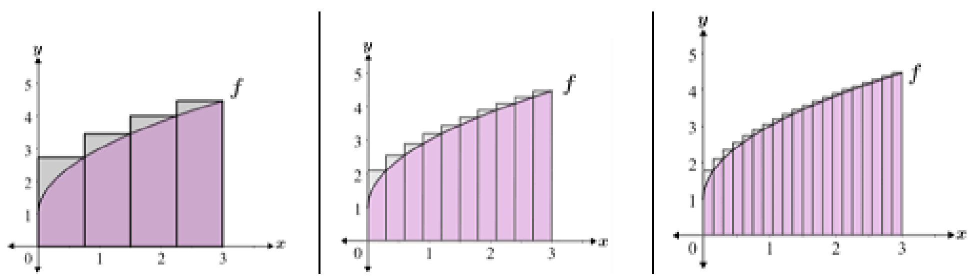
- La largeur de chaque rectangle vaut ....
- En revanche, la hauteur est variable : le rectangle ayant pour largeur $[x_i, x_{i+1}]$ a pour hauteur ....

Ainsi, l'aire totale obtenue par les rectangles vaut :

$$S_n \quad =$$

La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une somme de Riemann associée à f. Elle est obtenue par la méthode des rectangles à gauche. On comprend intuitivement que, lorsque n tend vers $+\infty$, la somme de Riemann (S_n) tend vers la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$.

À noter : on peut aussi définir une somme de Riemann associée à f par la méthode des rectangles à droite : cette fois la hauteur du rectangle ayant pour base $[x_i, x_{i+1}]$ est choisie comme étant $f(x_{i+1})$. Si on note S'_n l'aire totale de ces rectangles. Là encore, on a $S'_n \to \displaystyle\int_a^b f$:



Enfin, cela fonctionne si f est continue, mais aussi lorsque f est continue par morceaux :

Théorème 33.23

Soit $f \in \mathcal{CM}([a,b],\mathbb{K})$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \int_a^b f \qquad \text{avec} \quad S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} S'_n = \int_a^b f \qquad \text{avec} \quad S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)$$

Exemple 17. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2+k^2}$.

4 Formules de Taylor globales

4.1 Formule de Taylor avec reste intégral

Théorème 33.24 – Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $a \in I$, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I,\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall x \in I \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

Remarque. Cette formule ressemble beaucoup à la formule de Taylor-Young, qui s'écrit :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \underset{x\to a}{o}((x-a)^p)$$

Cependant, ces deux formules sont à bien des égards différentes.

- La formule de Taylor avec reste intégral est valable pour tout point $x \in I$: elle a donc une validité "globale", mais l'inconvénient est qu'elle nécessite d'avoir f de classe $\mathscr{C}^{p+1}$.
- La formule de Taylor-Young a une validité "locale" : elle ne fait que donner une information sur une limite quand x tend vers a. Cependant, elle nécessite uniquement f de classe $\mathscr{C}^p$ pour être valide.

Démonstration. On raisonne par récurrence sur $p \in \mathbb{N}$.

- Si $p = 0$, pour toute fonction $f \in C^1(I,\mathbb{K})$, on a (conséquence du TFA) :

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

  Ainsi, la propriété est vraie pour $p = 0$.

- Supposons la propriété vraie pour un $p \in \mathbb{N}$. Montrons-la pour le rang $p+1$. Soit $f \in C^{p+2}(I, \mathbb{K})$. Alors a fortiori $f \in C^{p+1}(I, \mathbb{K})$, si bien que par l'hypothèse de récurrence :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt$$

Finalement, la propriété est vraie pour tout rang $p \in \mathbb{N}$. $\square$

4.2 Inégalité de Taylor-Lagrange

La formule de Taylor avec reste intégral est importante, mais la plupart des exercices nécessitent plutôt l'inégalité qui suit :

Théorème 33.25 – Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $a \in I$, $p \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{p+1}(I, \mathbb{K})$. Soit $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\sup_{t \in I} \left| f^{(p+1)}(t) \right| \leq K$$

Alors,

$$\forall x \in I \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq K \frac{|x-a|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Remarque. Si $p = 0$, alors l'inégalité de Taylor-Lagrange coïncide avec l'inégalité des accroissements finis : si $f \in \mathscr{C}^1(I, \mathbb{K})$, pour tout $K \geq \sup_{t \in I} |f'(t)|$, on a :

$$\forall x \in I \qquad |f(x) - f(a)| \leq K \times |x-a|$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathscr{C}^{p+1}$, on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à f. On ne traite que le cas $x \geq a$:

$$\begin{aligned}
\left| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| &= \left| \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} f^{(p+1)}(t)dt \right| \\
&\leq \int_a^x \left| \frac{(x-t)^p}{p!} \right| \times \left| f^{(p+1)}(t) \right| dt \qquad \text{car } x \geq a \\
&\leq \int_a^x \frac{(x-t)^p}{p!} \times K\, dt \qquad \text{car } x - t \geq x - a \geq 0 \\
&= \frac{K}{p!} \int_a^x (x-t)^p dt \\
&= \frac{K}{p!} \left[-\frac{(x-t)^{p+1}}{(p+1)} \right]_a^x \\
&= \frac{K}{(p+1)!} \times (x-a)^{p+1}
\end{aligned}$$

□

Exemple 18. Avec l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $\left| \cos x - 1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} \right| \leq \frac{x^5}{5!}$

5 Continuité uniforme

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On rappelle que f est continue sur I si :

$$\forall x \in I \quad \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in I \qquad \Big(\quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \quad \Big)}_{f \text{ est continue en } x} \tag{$\star$}$$

Dans cette définition, le δ à trouver dépend a priori de x et de ε.

Remarque (*Intuition géométrique de la continuité en x de f*)**.** On considère le point $(x, f(x))$ de la courbe $\mathcal{C}_f$. Puis on va tracer un cadre rectangulaire de centre $(x, f(x))$. Ce cadre est dit "correct" si la courbe $\mathcal{C}_f$ est toute entière contenue dans ce cadre et si la courbe "sort du cadre" par les côtés gauche et droite de ce cadre. Sinon, il est dit "incorrect" (notamment si la courbe sort par les côtés haut et bas du cadre).

Si on note ε la demi-hauteur et δ la demi-largeur du cadre, dire que le cadre est correct signifie :

$$\begin{aligned} &\forall y \in I \qquad x-\delta \leq y \leq x+\delta \implies f(x)-\varepsilon \leq f(y) \leq f(x)+\varepsilon \\ \iff &\forall y \in I \qquad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

f **est continue en** x **si, quelle que soit la demi-hauteur** $\varepsilon > 0$ **qu'on choisit, il existe une demi-largeur** $\delta > 0$ (qui peut donc dépendre de x et de ε) **qui rend le cadre correct.**

Définition 33.26 – Continuité uniforme

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est <u>uniformément continue</u> si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in I \qquad \Big(\quad |x-y| \leq \delta \implies |f(x)-f(y)| \leq \varepsilon \quad \Big) \tag{$\star\star$}$$

Avec cette écriture, le δ dépend toujours de ε mais ne dépend plus ni de x, ni de y. Par exemple si $\varepsilon = 1$, cela signifie qu'il existe $\delta > 0$, qui est le même pour tous les points x, y, tels que

$$y \in [x-\delta, x+\delta] \quad \implies \quad |f(x)-f(y)| \leq 1$$

Intuitivement, l'uniforme continuité signifie que la distance $|f(y)-f(x)|$ peut être rendue aussi petite que l'on veut tant que $|y-x|$ sera plus petit qu'une valeur δ fixée qui est la même pour tous les points x, y.

Remarque (*Intuition géométrique de la continuité uniforme de f sur I*)**.** Là encore, on va tracer un cadre de demi-hauteur ε et de demi-largeur δ. Cependant, ce cadre sera mobile : le centre de ce cadre va parcourir tous les points $(x, f(x))$.

f **est uniformément continue sur** I **si, quelle que soit la demi-hauteur** $\varepsilon > 0$ **qu'on choisit, il existe une demi-largeur** $\delta > 0$ (qui peut donc dépendre de ε mais pas de x) **qui rend le cadre correct.**

On pourra également consulter l'animation sur la page anglophone de wikipédia : https://en.wikipedia.org/wiki/Uniform_continuity. Attention, les cadres sont dessinés pour des valeurs de ε et de δ fixées.

Exemple 19. Est-ce que $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}_+$? (On tracera d'abord un dessin pour s'en convaincre puis on en donnera une preuve rigoureuse).

Théorème 33.27

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Alors on a les implications suivantes

$$f \text{ lipschitzienne} \implies f \text{ uniformément continue} \implies f \text{ continue}$$

Démonstration. Justifions la deuxième implication : on suppose f uniformément continue sur I, elle vérifie alors la définition ($\star\star$) vue plus haut. En particulier, f vérifie l'assertion ($\star$) où le quantificateur "$\forall x \in I$" a été placé au début de l'assertion. En effet, par cet opération, le δ est alors autorisé à dépendre de x, mais on sait déjà qu'on peut le fixer indépendamment de x par l'assertion ($\star\star$). On trouve ainsi que f est continue sur I.

Montrons la première implication. Supposons que f est K-lipchitzienne avec $K > 0$. Alors pour tous $x, y \in I$,

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $\delta = \dfrac{\varepsilon}{K} > 0$. Alors, pour tous $x, y \in I$

$$|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq K\delta = \varepsilon$$

donc f est uniformément continue. □

Théorème 33.28 – Théorème de Heine

Si f est continue sur un segment $\left[a, b\right]$, alors f est uniformément continue sur $\left[a, b\right]$.

Exemple 20. La fonction $f : x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $\left[0, 1\right]$ car f est continue sur $\left[0, 1\right]$.

6 Complément : preuve du théorème qui définit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux

Rappelons ce théorème :

Théorème 33.29 – Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Soit $f \in \mathcal{CM}(\left[a, b\right], \mathbb{R})$.

- Il existe une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier sur $\left[a, b\right]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Pour toute telle suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On définit l'intégrale de f sur $\left[a, b\right]$ par :

$$\int_{\left[a,b\right]} f := \lim_{n\to+\infty} \int_a^b g_n$$

Cette limite ne dépend pas de la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie.

Démonstration. On utilise le lemme d'approximation (Lemme 33.12) : pour tout $n \in \mathbb{N}$, si on pose $\varepsilon = \dfrac{1}{n+1} > 0$, il existe une fonction $g_n \in \mathcal{E}(\left[a, b\right], \mathbb{R})$ telle que

$$\sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x) - g_n(x)| \leq \frac{1}{n+1}$$

On dispose donc d'une suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{E}(\left[a, b\right], \mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\alpha_n := \sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x) - g_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Montrons que $\left(\int_a^b g_n\right)$ est bornée. Par inégalité triangulaire (intégrale), on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x)|\,dx$$

Il faut donc majorer la fonction $|g_n|$. Comme $f \in \mathcal{CM}(\left[a,b\right],\mathbb{R})$, la fonction f est bornée par une constante $M \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \left[a,b\right]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &= |g_n(x) - f(x) + f(x)| \\ &\leq |g_n(x) - f(x)| + |f(x)| \\ &\leq \sup_{x\in\left[a,b\right]} |g_n(x) - f(x)| + \sup_{x\in\left[a,b\right]} |f(x)| \\ &\leq \alpha_n + M\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \leq \int_a^b |g_n(x)|\,dx \leq \int_a^b (\alpha_n + M)\,dx = (\alpha_n + M) \times (b-a)$$

Or, la suite (α_n) est convergente, donc bornée par un certain $K \in \mathbb{R}_+$. On en déduit que $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par $(K+M)(b-a)$.

- Montrons à présent que la suite $\left(\int_a^b g_n\right)$ converge. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, comme la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe donc une extractrice φ et un réel ℓ tels que

$$\int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

On va montrer qu'en fait la suite $\left(\int_a^b g_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ toute entière (et pas juste sa sous-suite) converge vers ℓ. Pour cela montrons que $\left|\int_a^b g_n - \ell\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On a tout d'abord :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b g_n - \ell\right| &= \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)} + \int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right| \\ &\leq \left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| + \underbrace{\left|\int_a^b g_{\varphi(n)} - \ell\right|}_{\to 0} \qquad \text{car } \int_a^b g_{\varphi(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or :

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| &\leq \int_a^b \left|g_n(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par inégalité triangulaire intégrale} \\
&= \int_a^b \left|g_n(t) - f(t) + f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \\
&\leq \int_a^b |g_n(t) - f(t)|\, dt + \int_a^b \left|f(t) - g_{\varphi(n)}(t)\right| dt \qquad \text{par in. tri. dans } \mathbb{R} \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \alpha_{\varphi(n)} \qquad \text{car } \begin{cases} \sup\limits_{t\in[a,b]} |g_n(t) - f(t)| \leq \alpha_n \\ \sup\limits_{t\in[a,b]} \left|g_{\varphi(n)}(t) - f(t)\right| \leq \alpha_{\varphi(n)} \end{cases} \\
&= \left(\alpha_n + \alpha_{\varphi(n)}\right)(b-a)
\end{aligned}$$

Or, $\alpha_n \to 0$ et par suite, $\alpha_{\varphi(n)} \to 0$. Donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b g_{\varphi(n)}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Finalement, on a bien montré que $\int_a^b g_n \to \ell$.

- Enfin, il faut montrer que la limite ℓ trouvée ne dépend pas de la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ choisie. Soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une autre suite telle que

$$\beta_n := \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - h_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On montre alors de même qu'il existe $\ell' \in \mathbb{R}$ tel que $\int_a^b h_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Montrons que $\ell = \ell'$. Pour tout $x \in [a,b]$ et $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| &= \left|\int_a^b (g_n - h_n)\right| \\
&\leq \int_a^b |g_n - h_n| \\
&= \int_a^b |g_n - f + f - h_n| \\
&\leq \int_a^b |g_n - f| + \int_a^b |f - h_n| \\
&\leq \int_a^b \alpha_n + \int_a^b \beta_n \\
&= \alpha_n(b-a) + \beta_n(b-a) \to 0 \qquad \text{car } \alpha_n \to 0 \quad \text{et} \quad \beta_n \to 0
\end{aligned}$$

Et donc $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, on a également $\left|\int_a^b g_n - \int_a^b h_n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left|\ell - \ell'\right|$ par opérations sur les limites. D'où par unicité de la limite $|\ell - \ell'| = 0$, i.e. $\ell = \ell'$.

$\square$

7 Méthodes pour les exercices

Méthode – Intégrales à paramètre

Pour calculer une limite d'une intégrale à paramètre I donnée, on peut :

- Conjecturer la limite puis montrer que I tend bien vers cette limite, via un encadrement (si la limite est finie) ou une majoration / minoration (si elle est infinie), cf Exemple 14.
- Sinon, on peut essayer d'encadrer / majorer / minorer la fonction à l'intérieur de l'intégrale assez finement pour que, après intégration, on puisse en déduire la limite, cf Exemple 15.

Méthode

Pour calculer une limite ou un équivalent d'une somme $\sum f(k)$, on peut essayer de faire apparaitre une somme de Riemann, en essayant de la transformer en $n^\alpha \sum f\left(\frac{k}{n}\right)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.