Chapitre 32

Déterminants

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

E et F désignent deux $\mathbb{K}$-e.v.

n et p sont des entiers de $\mathbb{N}^*$.

1 Application n-linéaire

1.1 Forme bilinéaire (ou 2-linéaire)

Définition 32.1 – Application bilinéaire

On dit que $f : E \times E \to F$ est une application bilinéaire si f est linéaire par rapport à chacune de ses 2 variables, c'est-à-dire :

- Pour tout y_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} f(\bullet, y_0) : E &\to F \\ x &\mapsto f(x, y_0) \end{aligned}$$

  on dit que f est linéaire en sa première variable.
- Pour tout x_0 dans E, l'application suivante est linéaire :

$$\begin{aligned} f(x_0, \bullet) : E &\to F \\ y &\mapsto f(x_0, y) \end{aligned}$$

  on dit que f est linéaire en sa seconde variable.

Si de plus $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme bilinéaire.

Attention, les notations "$f(\bullet, y_0)$" et "$f(x_0, \bullet)$" ne sont en rien officielles et on ne les écrira pas sur une copie.

Exemple 1. L'application "produit scalaire" $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

est une forme bilinéaire.

Définition 32.2

Soit $f : E \times E \to F$ une application quelconque. On dit que f est symétrique si :

$$\forall x, y \in E \qquad f(y,x) = f(x,y)$$

Théorème 32.3

Si $f : E \times E \to F$ est une application symétrique et linéaire en une de ses variables, alors f est linéaire en son autre variable, donc f est bilinéaire.

Démonstration. Supposons par exemple que f est linéaire en sa première variable. Montrons que f est linéaire en sa seconde variable.

□

Exemple 2.

- L'application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $f(M,N) = MN$ est une application bilinéaire. Est-elle symétrique ?
- L'application $\varphi : \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f,g) = \displaystyle\int_0^1 fg$ est une forme bilinéaire. Est-elle symétrique ?
- L'application $\psi : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\varphi(f,g) = f \circ g$ est une application bilinéaire (non symétrique en général). Attention, cela n'est pas vrai si l'application φ est définie sur $\mathcal{F}(F,G) \times \mathcal{F}(E,F)$ dans $\mathcal{F}(E,G)$: elle serait encore linéaire selon sa .... variable mais ne serait plus linéaire en sa .... variable.

Théorème 32.4 – Il en faut peu pour connaitre une application bilinéaire

On suppose que $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $f : E \times E \to F$ une application bilinéaire. Pour tous vecteurs $u, v \in E$, si on pose

$$u = \sum_{i=1}^{n} u_i e_i \qquad v = \sum_{j=1}^{n} v_j e_j$$

alors :

$$f(u,v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} u_i v_j f(e_i, e_j)$$

En particulier, il suffit de connaitre / définir les valeurs de $f(e_i, e_j)$ pour tout couple $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ pour totalement connaitre / définir l'application f.

Démonstration.

□

1.2 Forme n-linéaire

On rappelle que $n \in \mathbb{N}^*$ par hypothèse, et que $E^n := \underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$. Attention, n n'est pas nécessairement la dimension de E (qui peut être de dimension infinie d'ailleurs !).

Définition 32.5 – Application n-linéaire

On dit que $f : E^n \to F$ est une application n-linéaire (sur E) si f est linéaire par rapport à chacune de ses n variables, c'est-à-dire :

- Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et pour toute famille $(u_1, \cdots, u_{i-1}, u_{i+1}, \cdots, u_n) \in E^{n-1}$ l'application suivante est linéaire :

$$f(u_1, \cdots, u_{i-1}, \quad \bullet \quad, u_{i+1}, \cdots, u_n) : \quad \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(u_1, \cdots, u_{i-1}, \quad x \quad, u_{i+1}, \cdots, u_n) \end{array}$$

Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme n-linéaire.

Le n de cette définition peut être remplacé par tout entier naturel non nul : on peut ainsi parler d'application 3-linéaire, 4-linéaire, m-linéaire ou p-linéaire (du moment que m et p ont été introduits).

Exemple 3. Les applications 1-linéaires sont exactement les applications linéaires.
Les applications 2-linéaires sont exactement les applications bilinéaires.

Exemple 4. L'application $\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbb{K})^{2025} \to \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $\varphi(M_1, \cdots, M_{2025}) = M_1 \cdots M_{2025}$ est une application 2025-linéaire.

Exemple 5. L'application $\varphi : \mathscr{C}^0(\mathbb{R})^3 \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(f, g, h) = \displaystyle\int_0^1 fgh$ est une forme 3-linéaire.

1.3 Forme linéaire alternée

Définition 32.6 – Forme linéaire alternée

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est alternée si elle s'annule lorsque deux de ses arguments sont égaux.

Autrement dit, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$ et tous vecteurs $x, u_1, \cdots, u_n \in E^n$, on a

$$f(u_1, \cdots u_{i-1}, \quad x \quad, u_{i+1}, \cdots, u_{j-1}, \quad x \quad, u_{j+1}, \cdots, u_n) = 0$$

(les vecteurs u_i et u_j n'ont pas été utilisés)

Théorème 32.7

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$.

- Si $(u_1, \cdots, u_n)$ est une famille *liée* de vecteurs de E, alors $f(u_1, \cdots, u_n) = 0$.
- La valeur de $f(u_1, \cdots, u_n)$ ne change pas si on ajoute à un des vecteurs u_i une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \qquad f\left(u_1, \cdots, u_{n-1}, \quad u_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i u_i\right) = f(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration.

□

Définition 32.8 – Forme n-linéaire antisymétrique

Soit $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire sur E. On dit que f est antisymétrique si, lorsqu'on échange la position de deux des ses arguments, l'expression change de signe.

Autrement dit, pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i < j$, on a

$$f(u_1, \cdots, u_i, \cdots, u_j, \cdots, u_n) \quad = \quad -f(u_1, \cdots, u_j, \cdots, u_i, \cdots, u_n)$$

Théorème 32.9

Soit f une forme n-linéaire sur E antisymétrique, et soit une permutation $\sigma \in S_n$. Alors pour tout $(u_1, \cdots, u_n) \in E^n$, on a

$$f(u_{\sigma(1)}, \cdots, u_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration. Si τ est une transposition, alors comme f est antisymétrique,

$$f(u_{\tau(1)}, \cdots, u_{\tau(n)}) = -f(u_1, \cdots, u_n)$$

Par ailleurs, la permutation σ peut se décomposer en produit de transpositions : $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_r$. Ainsi, par récurrence immédiate :

$$\begin{aligned} f(u_{\tau_1 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_1 \cdots \tau_r(n)}) &= -f(u_{\tau_2 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_2 \cdots \tau_r(n)}) \\ &= f(u_{\tau_3 \cdots \tau_r(1)}, \cdots, u_{\tau_3 \cdots \tau_r(n)}) \\ &= (-1)^r f(u_1, \cdots, u_n) \end{aligned}$$

Or, comme σ est le produit de r transpositions, on a $\varepsilon(\sigma) = (-1)^r$. D'où le résultat. $\square$

Théorème 32.10

Une forme n-linéaire est alternée si et seulement si elle est antisymétrique.

Démonstration.

□

2 Définition du déterminant

Hypothèse

Pour le reste du chapitre, E est un espace de dimension **finie** égale à n.

2.1 Expression d'une forme n-linéaire alternée sur un e.v. de dimension n

On a vu avec le Théorème 32.4 comment s'exprime $f(u,v)$ avec f une application bilinéaire définie sur E de dimension finie. On va faire la même étude pour une forme n-linéaire alternée définie sur un e.v. E de dimension n. Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E et $f : E^n \to \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée sur E. Pour simplifier, on fera la présentation dans le cas $n=3$.
Soit (u_1,u_2,u_3) une famille de 3 vecteurs de E dont on pose leurs coordonnées selon la base $\mathcal{B}$:

$$u_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + a_{3j}e_3 \qquad \text{i.e.} \qquad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \end{pmatrix}$$

Calculons $f(u_1,u_2,u_3)$ en fonction des coordonnées a_{ij} :

$$f(u_1,u_2,u_3) = f\left(a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3,\ a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3,\ a_{13}e_1 + a_{23}e_2 + a_{33}e_3\right)$$

On peut ensuite développer chaque somme par linéarité comme on l'a fait pour une application bilinéaire. On se retrouverait alors avec 3^3 termes :

$$\begin{aligned}
&f(u_1,u_2,u_3)\\
&=\underbrace{a_{11}a_{12}a_{13}f(e_1,e_1,e_1)}_{\substack{\text{on prend les indices } (1,1,1)\\ \text{dans les composantes}}} + \underbrace{a_{11}a_{12}a_{23}f(e_1,e_1,e_2)}_{\substack{\text{on prend les indices } (1,1,2)\\ \text{dans les composantes}}} + \dots + \underbrace{a_{31}a_{32}a_{33}f(e_3,e_3,e_3)}_{\substack{\text{on prend les indices } (3,3,3)\\ \text{dans les composantes}}}\\
&=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{i1}a_{j2}a_{k3}f(e_i,e_j,e_k)\\
&=\sum_{(i,j,k)\in[\![1,3]\!]} a_{i1}a_{j2}a_{k3}f(e_i,e_j,e_k)
\end{aligned}$$

Cependant, comme f est alternée, les termes ci-dessus s'annulent dès que deux indices parmi i,j,k sont égaux. Ainsi, on en déduit que la somme peut être restreinte aux triplets (i,j,k) avec i,j,k distincts, c'est-à-dire aux triplets (i,j,k) obtenus par une permutation de $(1,2,3)$. On peut ainsi écrire :

$$f(u_1,u_2,u_3)=\sum_{\sigma\in S_3} a_{\sigma(1)\,1}a_{\sigma(2)\,2}a_{\sigma(3)\,3}f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)})$$

Enfin, comme f est antisymétrique (puisqu'elle est alternée), on a $f(e_{\sigma(1)},e_{\sigma(2)},e_{\sigma(3)})=\varepsilon(\sigma)f(e_1,e_2,e_3)$ par le Théorème 32.9, donc :

$$f(u_1,u_2,u_3)=\left(\sum_{\sigma\in S_3}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)\,1}a_{\sigma(2)\,2}a_{\sigma(3)\,3}\right)f(e_1,e_2,e_3)$$

On en déduit en particulier qu'il en faut très peu pour connaitre / définir une forme 3-linéaire alternée : la valeur de $f(e_1,e_2,e_3)$ suffit ! Plus généralement, avec une forme n-linéaire sur un e.v. de dimension n, on a le résultat suivant :

Théorème 32.11

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E. Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $u_1,\cdots,u_n$ des vecteurs de E. Alors :

$$f(u_1,\cdots,u_n)=\left(\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)a_{\sigma(1)\,1}\cdots a_{\sigma(n)\,n}\right)f(e_1,\cdots,e_n)$$

où, pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a noté $(a_{1\,j},\cdots,a_{n\,j})$ les coordonnées de u_j selon la base $(e_1,\cdots,e_n)$.

Corollaire 32.12

Soit $\mathcal{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une base de E.

- Il existe une unique forme n-linéaire alternée $D:E^n\to\mathbb{K}$ telle que $D(e_1,\cdots,e_n)=1$.
- De plus, toute autre forme n-linéaire alternée f sur E est proportionnelle à D :

$$\exists\lambda\in\mathbb{K}\qquad f=\lambda D$$

Démonstration.

□

Remarque. On note parfois $\Lambda_n^*(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. On peut montrer que c'est un s.e.v. de $\mathcal{L}(E)$. Le Corollaire 32.12 dit en substance que $\Lambda_n^*(E)$ est de dimension 1, et qu'on peut prendre pour base, la famille à un seul élément (D) :

- La première assertion montre que $D \neq 0$, donc la famille (D) est libre.
- La deuxième assertion montre que la famille (D) est génératrice de $\Lambda_n^*(E)$.

2.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Étant donné une base $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ de E, on va donner un nom particulier à l'unique forme n-linéaire alternée f du Corollaire 32.12.

Définition 32.13 – Déterminant d'une famille de vecteurs

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : \begin{array}{rcl} E^n & \to & \mathbb{K} \\ (u_1, \cdots, u_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n} \end{array}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, a_{ij} est la coordonnée de u_j selon le vecteur e_i, i.e. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$.

Théorème 32.14

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E.

- $\det_{\mathcal{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E.
- $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = 1$, ou encore $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Démonstration. En effet, l'application $\det_{\mathcal{B}}$ correspond à l'application D du Corollaire 32.12 : il s'agit bien d'une forme n-linéaire alternée et elle vérifie $D(e_1, \cdots, e_n) = 1$ par construction. □

Théorème 32.15

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors $\det_{\mathcal{B}'}$ est proportionnelle à $\det_{\mathcal{B}}$. Plus précisément :

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Démonstration. On a vu que $\det_{\mathcal{B}'}$ et $\det_{\mathcal{B}}$ sont des formes n-linéaires alternées, et par le Corollaire 32.12, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$. On évalue cette égalité en $\mathcal{B}$, ce qui donne

$$\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = \lambda \underbrace{\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B})}_{=1} = \lambda$$

Ainsi, $\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}$. On conclut à l'égalité voulue en évaluant en un n-uplet $(u_1, \cdots, u_n)$ quelconque de vecteurs de E. □

Corollaire 32.16

Soit $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \times \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = 1$$

En particulier, $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ et $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \neq 0$.

Démonstration. L'égalité du Théorème 32.15 étant vraie pour tout n-uplet $(u_1, \cdots, u_n)$ de E^n, on peut en particulier prendre $(u_1, \cdots, u_n) = \mathcal{B}'$: on a donc

$$\begin{aligned} & \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \\ \Longrightarrow \qquad & 1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \times \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Corollaire 32.17 – Caractérisation d'une base

On rappelle que $\dim E = n$. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E.
2. Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.
3. Pour toute base $\mathcal{B}$ de E, on a $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.

Démonstration.

$\square$

Dans $\mathbb{K}^n$, en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique, on peut vérifier directement si $\det_{\mathcal{B}_c}(u_1, \cdots, u_n)$ est nul ou non : cela revient à calculer le déterminant de la matrice où les vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ sont écrits en colonne.

2.3 Déterminant d'une matrice, notation du déterminant

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E et $u_1, \cdots, u_n \in E$. On a vu que

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

avec a_{ij} la coordonnée du vecteur u_j selon e_i. Au final, on constate que l'expression de $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$ ne dépend que des coordonnées $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$. Cela permet de définir le déterminant d'une matrice A, indépendamment de vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ ou d'une base $(e_1, \cdots, e_n)$:

Définition 32.18

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **carrée**. On définit le <u>déterminant de A</u>, noté $\det A$, par :

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} := \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

Si a_{ij} représente la coordonnée du vecteur u_j selon e_i, alors

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \qquad \text{ou encore} \qquad \begin{vmatrix} \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1) & \cdots & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u_n) \\ \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n)$$

Remarque. En particulier, si $E = \mathbb{K}^n$ et si $\mathcal{B} = \mathcal{B}_c$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, alors $u_j \overset{\text{id.}}{=} \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(u_j)$: la colonne j du déterminant correspond au vecteur u_j reporté en colonne.

Exemple 6. On se place dans $E = \mathbb{K}_2[X]$. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On pose $P_1 = \alpha X^2 + 1$, $P_2 = X + \alpha$ et $P_3 = X^2 + \alpha X$. Écrire le déterminant de la famille (P_1, P_2, P_3) dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de E.

Exemple 7. Le déterminant de la matrice I_n vaut 1.

Remarque. Si $\dim E = n$, on prendra bien garde à toujours prendre une famille de n vecteurs $u_1, \cdots, u_n$ pour calculer un déterminant. Le déterminant doit toujours avoir autant de lignes que de colonnes.

3 Propriétés et calcul du déterminant

3.1 Calcul pour des tailles $n \leq 3$

Cas $n = 1$. On a $S_1 = \{\mathrm{id}\}$, donc $\begin{vmatrix} a_{11} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} = a_{11}$

Cas $n = 2$. On a $S_2 = \{\mathrm{id}, \tau\}$ avec $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \varepsilon(\mathrm{id}) a_{\mathrm{id}(1)\,1} a_{\mathrm{id}(2)\,2} + \varepsilon(\tau) a_{\tau(1)\,1} a_{\tau(2)\,2} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

On retiendra donc la formule (à savoir par cœur !) : $\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \qquad\qquad}$

Exemple 8. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} =$ $\qquad$ $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$

Cas $n = 3$. Lorsque $n = 3$, la définition du déterminant ($\sum\limits_{\sigma \in S_n} (\cdots)$) donne une expression à 6 termes, car $\mathrm{card}(S_3) = 3! = 6$. En pratique, on retiendra la règle de calcul suivante, appelée <u>règle de Sarrus</u> :

Exemple 9. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} =$

Remarque. La règle de Sarrus ne se généralise pas à des tailles $n \geq 4$.

Exemple 10. Déterminer si la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3.2 Propriétés du déterminant sur les colonnes

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $C_1, \cdots, C_n$ les colonnes : $A = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$. Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\det A = \det_{\mathcal{B}_c}(C_1, C_2, \cdots, C_n)$$

Or, on a vu que $\det_{\mathcal{B}_c}$ est une forme n-linéaire alternée. On en déduit le résultat suivant :

Théorème 32.19

Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée appliquée aux colonnes de la matrice. En particulier, avec les notations ci-dessus :

1. Le déterminant est linéaire selon une colonne quelconque : pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{B}_c}(\cdots, \lambda C_j + \mu C'_j, \cdots) = \begin{vmatrix} & \lambda a_{1j} + \mu a'_{1j} & \\ & \lambda a_{2j} + \mu a'_{2j} & \\ * & \vdots & * \\ & \lambda a_{nj} + \mu a'_{nj} & \end{vmatrix} &= \lambda \begin{vmatrix} & a_{1j} & \\ & a_{2j} & \\ * & \vdots & * \\ & a_{nj} & \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} & a'_{1j} & \\ & a'_{2j} & \\ * & \vdots & * \\ & a'_{nj} & \end{vmatrix} \\ &= \lambda \det_{\mathcal{B}_c}(\cdots, C_j, \cdots) + \mu \det_{\mathcal{B}_c}(\cdots, C'_j, \cdots) \end{aligned}$$

2. Si les colonnes $C_1, \cdots, C_n$ forment une famille liée, alors $\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = 0$.

3. Le déterminant est inchangé lorsqu'on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres. Par exemple :

$$\forall \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{K} \qquad \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i C_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

4. Si on échange deux colonnes, le déterminant de A change de signe.

5. Plus généralement, une permutation des colonnes selon $\sigma \in S_n$ multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$:

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{\sigma(1)} & C_{\sigma(2)} & \cdots & C_{\sigma(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma) \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{vmatrix}$$

Démonstration. La première assertion découle du fait que le déterminant est une forme n-linéaire. Les deuxième et troisième assertions se déduisent du fait que le déterminant est une forme alternée en utilisant le Théorème 32.7.Les quatrième et cinquième assertions sont la conséquence directe du fait que $\det_{\mathcal{B}_c}$ est une forme antisymétrique (car alternée) en invoquant le Théorème 32.9. □

Les propriétés énoncées ci-dessus ont de *nombreuses* conséquences et applications.

Exemple 11.

- $$\begin{vmatrix} 1 & & 2 \\ \vdots & * & \vdots \\ 1 & & 2 \end{vmatrix} = \qquad\qquad \text{et} \qquad \begin{vmatrix} 0 & & \\ \vdots & * & \\ 0 & & \end{vmatrix} =$$
- $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad \dots\dots\dots\dots \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \quad \dots\dots\dots$$

3.3 Propriétés sur les lignes

Théorème 32.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det\left(A^\top\right) = \det A$.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont on note $L_1, \cdots, L_n$ les lignes. Alors en notant $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$,

$$\det A = \det\left(A^\top\right) = \det_{\mathcal{B}_c}\begin{pmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_1 & L_2 & \cdots & L_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \det_{\mathcal{B}_c}(L_1, L_2, \cdots, L_n)$$

Théorème 32.21

Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée appliquée aux lignes de la matrice. En particulier, les résultats du Théorème 32.19 sont encore vrais si on remplace le mot "colonne(s)" par "ligne(s)".

Exemple 12.

- $$\begin{vmatrix} & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$
- $$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \dots\dots\dots\dots\dots$$

4 Calcul pratique du déterminant

4.1 Opérations élémentaires

On peut effectuer des opérations sur les lignes ou sur les colonnes pour calculer un déterminant, comme pour le calcul du rang. Cependant, contrairement au rang, la valeur du déterminant est modifiée quand on effectue une permutation ou une dilatation.

Théorème 32.22 – Opérations élémentaires

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$.

1. Transvection : une opération $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$, ne change pas le déterminant.
2. Permutation : une opération $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$ change le signe du déterminant.
3. "Dilatation" : on peut "factoriser" par λ dans toute une colonne ou dans toute une ligne :

$$\begin{vmatrix} & & * & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} & & * & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & * & \end{vmatrix}$$

Démonstration. Tout découle du Théorème 32.19 pour les colonnes, et du section 3.3 pour les lignes.

1. Une transvection revient à ajouter à une colonne (ou une ligne) une combinaison linéaire des autres. L'assertion 3 du Théorème 32.19 entraine alors que le déterminant est inchangé.
2. L'assertion pour la permutation est une conséquence directe de l'assertion 3 du Théorème.
3. Enfin, la dilatation est une conséquence du fait que le déterminant est une forme n-linéaire en les colonnes (et les lignes).

□

Exemple 13. Calculer $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Remarque. Attention, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $\det(-A) = (-1)^n \det A$ et non $-\det A$! Le déterminant n'est pas une application linéaire en la matrice, mais bien en ses colonnes ou ses lignes. Sur le même principe, $\det(A+B)$ n'est pas égal à $\det A + \det B$ en général.

Exemple 14. Soit $A \in A_{2n+1}(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique de taille $2n+1$. Montrer que $\det A = 0$.

4.2 Développement selon une ligne / colonne (cas simple)

Ces méthodes permettent de réduire la taille d'un déterminant, à savoir passer d'un déterminant de taille n à une somme de déterminants de taille $n-1$. On suppose donc dans cette partie que $n \geq 2$.

Théorème 32.23

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \lambda \in \mathbb{K} \text{ et } A' \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$$

Alors $\det A = \lambda \det A'$.

Démonstration. On fait permuter les lignes selon le cycle $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}$, i.e. $\begin{cases} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_3 \\ \cdots \\ L_n \leftarrow L_1 \end{cases}$ puis de même avec les colonnes. Comme la signature de ce cycle vaut $(-1)^{n-1}$, on a :

$$\det A = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \\ \lambda & * & \cdots & * \end{vmatrix} = \cancel{(-1)^{n-1} \times (-1)^{n-1}} \begin{vmatrix} & & & 0 \\ & A' & & \vdots \\ & & & 0 \\ * & \cdots & * & \lambda \end{vmatrix}$$

Appelons a_{ij} les coefficients de la matrice du déterminant de droite (en particulier $a_{nn} = \lambda$). On a ainsi

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n)\,n}$$

Si $\sigma \in S_n$ est telle que $\sigma(n) \neq n$, alors $a_{\sigma(n)\,n} = 0$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n-1)\,n-1} a_{nn} \\ &= \lambda \sum_{\substack{\sigma \in S_n \\ \sigma(n)=n}} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)\,1} \cdots a_{\sigma(n-1)\,n-1} \end{aligned}$$

On affirme que

$$\det A = \lambda \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \cdots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

En effet, si $\sigma \in S_n$ vérifie $\sigma(n) = n$, alors la permutation $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]}$ réalise une bijection de $[\![1, n-1]\!]$ dans lui-même, i.e. $\sigma|_{[\![1,n-1]\!]} \in S_{n-1}$. Réciproquement, si $\sigma' \in S_{n-1}$, alors on peut prolonger σ' en une permutation de $[\![1, n]\!]$ en posant $\sigma'(n) = n$. Enfin, on peut vérifier que la signature est inchangée lors de la restriction / du prolongement. D'où l'affirmation ci-dessus. Or,

$$\det A' = \sum_{\sigma' \in S_{n-1}} \varepsilon(\sigma') a_{\sigma'(1)\,1} \dots a_{\sigma'(n-1)\,n-1}$$

et donc $\det A = \lambda \det A'$. □

Comme $\det(A^\top) = \det A$, le même résultat s'applique en passant à la transposée :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & A' & \\ * & & & \end{pmatrix} \implies \det A = \lambda \det A'$$

On remarquera que dans les deux formules, si $\lambda = 0$, on obtient $\det A = 0$: c'est cohérent avec le fait que si une ligne ou une colonne est remplie de zéro, le déterminant est nul.

4.3 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 32.24 – Déterminant d'une matrice triangulaire

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice **triangulaire** (supérieure ou inférieure), alors

$$\det A = A_{11} A_{22} \cdots A_{nn}$$

Ce résultat est en particulier vrai si A est diagonale : $\det A$ est alors le produit des coefficients diagonaux.

Démonstration.

□

Remarque. Ceci fournit une première méthode de calcul d'un déterminant de taille 4 ou plus : on peut, par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes, se ramener à un déterminant d'une matrice triangulaire, puis faire le produit des éléments diagonaux.

Exemple 15. Calculer $D = \begin{vmatrix} 8 & 6 & 4 & 2 \\ 6 & 5 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$.

4.4 Développement selon une ligne / colonne (cas général)

Définition 32.25 – Mineur, cofacteur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $i, j \in [\![1, n]\!]$. On note

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} A_1 & & a_{1j} & & A_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & \vdots & & \\ A_3 & & a_{nj} & & A_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ \text{ligne } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \text{colonne } j & \end{array}$$

avec A_1, A_2, A_3, A_4 des sous-matrices rectangulaires. On appelle mineur d'indice (i, j) le déterminant obtenu en enlevant la ligne i et la colonne j de A. On le note

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix}$$

On appelle cofacteur d'indice (i, j) la quantité $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$.

Théorème 32.26 – Développement selon une ligne ou une colonne

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On fixe $i \in [\![1,n]\!]$. Alors on peut développer le déterminant de A selon la ligne i :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

- On fixe $j \in [\![1,n]\!]$. Alors on peut développer le déterminant de A selon la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

Ainsi, pour développer selon la ligne i, on somme tous les coefficients de la ligne i de A, chacun étant multiplié par le cofacteur de même indice.

Exemple 16. Soit $a,b,c,d \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} d & 1 & d \\ a & b & c \\ 1 & d & 1 \end{pmatrix}$. Développer selon la deuxième ligne le déterminant de A. En déduire une CNS sur a,b,c,d pour avoir $\det A = 0$.

Remarque. Pour retenir facilement le signe $(-1)^{i+j}$ qu'on met pour chaque mineur Δ_{ij}, on peut remarquer que ce signe est toujours positif pour $i = j = 1$ (en haut à gauche) et qu'il alterne une fois sur deux :

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \\ - & + & - & + & - \\ + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Remarque. L'exemple 16 illustre l'application de la formule générale du développement selon une ligne ou colonne. Mais il ne donne pas la bonne méthode pour écrire un déterminant sous forme factorisée. Pour faire apparaitre des facteurs, il faut au contraire utiliser la formule simple du développement selon une ligne colonne, qui permet d'écrire $\det A = \lambda \times \det A'$ sans faire apparaitre de somme. La bonne approche pour l'exemple ci-dessus est

À noter, si on développe par exemple selon la ligne i,

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$$

alors chaque coefficient a_{ij} nul entraine qu'il y a un terme de moins à calculer dans la somme ci-dessus. C'est ce qui permet de retrouver les formules de développement dans le cas "simple", i.e. le Théorème 32.23.

Méthode

Avant de développer selon une ligne ou une colonne, il est avantageux de faire apparaitre un grand nombre de zéros dans cette ligne ou cette colonne.

Bien qu'on puisse toujours se ramener à la forme du Théorème 32.23 avant de développer, cela peut prendre bien plus d'étapes, d'où l'importance de savoir développer selon une ligne ou colonne quelconque. De plus, le développement selon une ligne ou une colonne est primordial pour des calculs de déterminant par récurrence, cf exemple suivant.

Exemple 17. Calculer pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant de taille n défini par :

$$D_n := \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \mathbf{0} \\ 1 & 2 & 1 & & & \\ & 1 & 2 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

5 Déterminant d'un endomorphisme

5.1 Définition

On rappelle que si $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une famille de E et si $f \in \mathcal{L}(E)$, alors $f(\mathcal{B})$ est la famille définie par

$$f(\mathcal{B}) := (f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Théorème 32.27

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Il existe un unique scalaire λ tel que :

$$\forall (u_1, \cdots, u_n) \in E^n \qquad \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(u_1, \cdots, u_n) \tag{$*$}$$

De plus, le scalaire λ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie. On l'appelle le déterminant de f et il vaut (pour toute base $\mathcal{B}$) :

$$\lambda = \det f := \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$$

Démonstration. Montrons la première assertion. On considère l'application $\varphi : E^n \to \mathbb{K}$ définie par $\varphi(u_1, \cdots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \cdots, f(u_n))$. Comme f est linéaire, on vérifie que φ est une forme n-linéaire alternée. Ainsi, il existe un unique scalaire λ tel que $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$, ce qui donne $*$. De plus, lorsqu'on évalue $\varphi = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ en la base $(e_1, \cdots, e_n)$, on obtient :

$$\varphi(e_1, \cdots, e_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(e_1, \cdots, e_n) = \lambda \times 1$$

Ainsi, $\lambda = \varphi(e_1, \cdots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), \cdots, f(e_n)) = \det_{\mathcal{B}}(f(\mathcal{B}))$. Il reste à montrer que λ ne dépend pas de la base choisie. Soit $\mathcal{B}'$ une autre base de E. On a vu qu'alors $\det_{\mathcal{B}'} = \alpha \det_{\mathcal{B}}$ pour un certain scalaire α. En multipliant $*$ par ce scalaire α, on en déduit que pour tous $u_1, \cdots, u_n \in E$,

$$\det_{\mathcal{B}'}(f(u_1), \cdots, f(u_n)) = \lambda \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \cdots, u_n)$$

ce qui montre que le scalaire λ ne dépend pas de la base choisie. □

Exemple 18. Le déterminant de l'application id_E vaut :

$$\det(\mathrm{id}_E) = \det_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E(\mathcal{B})) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$$

5.2 Propriétés algébriques du déterminant

Théorème 32.28

On suppose E de dimension n. Soit $f, g \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det f$
- $\det(f \circ g) = \det f \det g$
- f est inversible si et seulement si $\det f \neq 0$ et dans ce cas

$$\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1} = \frac{1}{\det f}$$

Remarque. L'application déterminant est ainsi un morphisme de groupes de $(GL(E), \circ)$ dans $(\mathbb{K}^*, \times)$.

Démonstration.

- Montrons la première assertion. Par définition, si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$

$$\begin{aligned}
\det(\lambda f) &= \det_{\mathcal{B}}[(\lambda f)(\mathcal{B})] \\
&= \det_{\mathcal{B}}[\lambda f(e_1), \lambda f(e_2), \cdots, \lambda f(e_n)] \\
&= \lambda^n \det_{\mathcal{B}}[f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)] && \text{par linéarité} \\
&= \lambda^n \det f
\end{aligned}$$

-

-

□

Théorème 32.29

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors pour toute base $\mathcal{B}$ de E,

$$\det f = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)\right)$$

En particulier, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si on note u_A son morphisme canoniquement associé, alors $\det A = \det u_A$.

Démonstration. Par définition, si on pose $\mathcal{B} = (e_1, \cdots, e_n)$,

$$\begin{aligned}
\det f &= \det_{\mathcal{B}}\left(f(\mathcal{B})\right) \\
&= \det_{\mathcal{B}}\left(f(e_1), f(e_2), \cdots, f(e_n)\right) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

où a_{ij} est la coordonnée du vecteur $f(e_j)$ selon le vecteur e_i. Ainsi, a_{ij} est précisément le coefficient d'indice (i,j) de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$. Donc

$$\det f = \det \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$$

□

5.3 Version matricielle des propriétés précédentes

Théorème 32.30

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$
- $\det(AB) = \det A \det B$
- A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. Si tel est le cas, alors

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$$

Attention, en général, $\det(A+B) \boxed{\neq} \det A + \det B$. Par exemple :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \qquad \text{mais} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

Démonstration. Il suffit de considérer les morphismes canoniquement associés aux matrices A et B, et d'utiliser le Théorème 32.29 et le Théorème 32.28. □

Remarque. Bien que $AB \neq BA$ en général, on a tout de même $\det(AB) = \det(BA)$:

$$\det(AB) = \det A \det B \underbrace{=}_{\times \text{ est commutative dans } \mathbb{K}} \det B \det A = \det(BA)$$

Il en va de même pour les endomorphismes : $\det(f \circ g) = \det(g \circ f)$.

Théorème 32.31

Deux matrices semblables ont le même déterminant.

Démonstration.

□

6 Comatrice et formule d'inversion matricielle

Rappel : on a vu que A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$. De plus, on a vu la définition d'un cofacteur et d'un mineur à la Définition 32.25.

Définition 32.32 – Comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice notée $\mathrm{Com}(A)$, telle que son coefficient d'indice (i, j) soit le cofacteur de A d'indice (i, j), càd

$$[\mathrm{Com}(A)]_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} \qquad = (-1)^{i+j}\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{vmatrix} \quad \text{(déterminant de A sans la ligne i et la colonne j)}$$

où Δ_{ij} est le mineur de A d'indice (i, j).

Exemple 19. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors

$$\mathrm{Com}(A) = \begin{pmatrix} \Delta_{11} & -\Delta_{12} \\ -\Delta_{21} & \Delta_{22} \end{pmatrix} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Théorème 32.33

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a :

Remarque. Si A est inversible, il est possible de déterminer A^{-1} par la formule ci-dessus. Toutefois cette formule nécessite de calculer tous les cofacteurs de A, ce qui est extrêmement lourd en calcul pour les grandes valeurs de n. Elle a donc principalement un intérêt théorique. Cependant, elle est également intéressante pour calculer A^{-1} si la matrice A est de taille 2.

Exemple 20. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si

$$\det A = ad - bc \neq 0$$

et dans ce cas

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\mathrm{Com}(A)^\top =$$

7 Formules de Cramer

On considère un système linéaire sous forme matriciel de la forme $AX = B$ avec n équations et p inconnues, de sorte qu'on peut poser

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^p \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

On rappelle qu'on a vu les définitions de $\operatorname{Ker} A$ et $\operatorname{Im} A$ comme étant les noyaux et images du morphisme canoniquement associé à A qu'on note u_A.

Comme $AX = B$ équivaut à $u_A(X) = B$, les assertions ci-dessus justifient les théorèmes suivants :

Théorème 32.34

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

- On fixe $B \in \mathbb{K}^n$. Le système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ admet une solution si et seulement si $B \in \operatorname{Im} A$.
- On fixe $B \in \mathbb{K}^n$. Il y a unicité (mais pas forcément existence) de la solution du système $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathbb{K}^p$ si et seulement si $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{K}^p}\}$.
- $\Big($Pour tout $B \in \mathbb{K}^n$, le système $AX = B$ admet une et une seule solution$\Big)$ si et seulement si A est inversible (donc nécessairement $n = p$). Cette solution est donnée par $X = A^{-1}B$.

Définition 32.35

Un système linéaire $AX = B$ avec autant d'équations que d'inconnues et dont la matrice A est inversible est appelé un <u>système de Cramer</u>.

Si on note n ce nombre d'équations et d'inconnues du système, on a donc $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $X \in \mathbb{K}^n$ et $B \in \mathbb{K}^n$. Comme affirmé ci-dessus, un système de Cramer possède toujours une seule et unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Dans la suite, on s'intéresse exclusivement à un système de Cramer. Pour trouver la solution $X = A^{-1}B$, il faudrait inverser A, ce qui n'est pas toujours évident. C'est pourquoi on peut utiliser les formules de Cramer pour calculer X d'une autre manière.

Pour les besoins de la propriété suivante, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $A\left[B,k\right]$ la matrice obtenue en remplaçant la colonne k de A par celle de B (notation non officielle). On a donc :

$$A\left[B,k\right] := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,k-1} & b_1 & a_{1\,k+1} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n\,k-1} & b_n & a_{n\,k+1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Enfin, on rappelle que comme A est supposée inversible, on a $\det A \neq 0$.

Théorème 32.36 – Formules de Cramer

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et $B \in \mathbb{K}^n$. Soit $X = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ l'unique solution du système de Cramer $AX = B$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, la k-ième coordonnée de X vérifie :

$$x_k = \frac{\det(A\left[B,k\right])}{\det A}$$

On peut ainsi calculer chaque coordonnée x_k successivement.

Démonstration.

$\square$

Exemple 21. Soit $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. Résoudre le système $\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$

8 Mineur extrait et rang

Définition 32.37

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. On dit que B est une <u>sous-matrice de taille r</u> de A si la matrice B est obtenue en ne conservant que r lignes données de A et r colonnes données de A et en supprimant toutes les autres. On a donc $B \in \mathcal{M}_r(\mathbb{K})$.

Exemple 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \end{pmatrix}$. Donner la sous-matrice de A en ne conservant que les lignes L_1 et L_2 ainsi que C_1 et C_4 :

Idem en ne conservant que les lignes L_1, L_3 et L_5 ainsi que C_2, C_4 et C_5 :

Définition 32.38

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. On dit que Δ est un <u>mineur de taille r</u> de A si Δ est le déterminant d'une sous-matrice de taille r de A.

Théorème 32.39

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $\mathrm{rg}\,(A) \geq r$
- Il existe un mineur de taille r de A qui est non nul.

Théorème 32.40

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et r un entier tel que $1 \leq r \leq \min(n, p)$. La matrice A est de rang r si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Il existe un mineur de taille r de A qui est non nul.
2. Tous les mineurs de taille $r+1$ de A sont nuls.

On prend pour convention que si $r = \min(n, p)$, la deuxième condition n'est pas à vérifier car il n'existe pas de mineur de taille $r+1$ de A (c'est un "pour tout" sur l'ensemble vide donc l'assertion est vraie). De plus, si tous les mineurs de taille $r+1$ sont nuls, il en va de même pour les mineurs de taille $r+2$, $r+3$, etc.

Exemple 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{rg}\,(A) \geq 2$. On pourra ensuite vérifier par un calcul de rang classique que $\mathrm{rg}\,(A) = 2$, et donc que tout mineur de taille 3 (ou plus) de A est nul (essayez et vous verrez !)

Exemple 24. Soit $n \geq 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui vérifie $\mathrm{rg}\,(A) = n-2$. Déterminer $\mathrm{Com}(A)$.

9 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer qu'une application $f : E \times E \to F$ est bilinéaire, on peut :

- Montrer qu'elle est linéaire en chacune de ses deux variables.
- Si f est symétrique, montrer qu'elle est linéaire en une seule de ses variables (ce qui est suffisant).

Méthode – Calcul d'un déterminant

Pour calculer le déterminant d'une matrice A, on peut :

- Si le déterminant est de taille 3 ou moins, utiliser les formules classiques (notamment la règle de Sarrus).
- Si les lignes ou les colonnes forment une famille liée, conclure que le déterminant est nul.
- Si la matrice A est triangulaire, faire le produit des coefficients diagonaux.
- Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et/ou colonnes pour se ramener à une matrice triangulaire.
- Développer selon une ligne ou une colonne après avoir fait apparaitre le plus de zéros possibles sur cette ligne ou colonne.

Méthode – Calcul d'un déterminant (plus complexe)

- Pour calculer un déterminant sous forme factorisée, il faut privilégier le développement selon une ligne ou colonne (en s'assurant qu'il ne reste qu'un terme non nul dans cette ligne ou cette colonne).
- Pour calculer un déterminant de taille n, on peut faire des opérations élémentaires et des développements selon une ligne ou colonne pour faire apparaitre une relation de récurrence.